WSTĘP
DO
ANALIZY I ALGEBRY

Marian Gewert   Zbigniew Skoczylas

WSTĘP DO ANALIZY I ALGEBRY

Teoria, przykłady, zadania

Wydanie siódme poprawione

GiS

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2024

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–67234–09–2

Wydanie VII poprawione, Wrocław 2024
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp

Niniejszy podręcznik jest przeznaczony dla studentów politechnik, którzy zdawali maturę z matematyki tylko na poziomie podstawowym. Ma im pomóc w uzupełnieniu wiadomości niezbędnych do studiowania matematyki. Sądzimy, że książka będzie przydatna także osobom rozpoczynającym studia zaoczne po kilku latach od matury.

W książce omawiamy elementy logiki i teorii zbiorów, indukcję matematyczną, ciągi arytmetyczne i geometryczne, funkcje i ich podstawowe własności, a także geometrię analityczną na płaszczyźnie. Ponadto, przedstawiamy metody rozwiązywania równań i nierówności wielomianowych, trygonometrycznych, wykładniczych oraz logarytmicznych. Szczególny nacisk kładziemy na te fragmenty materiału, które sprawiają najwięcej trudności studentom w pierwszym semestrze.

Podręcznik oprócz teorii zawiera dużą liczbę przykładów rozwiązanych krok po kroku oraz zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Do wszystkich zadań podane są odpowiedzi. Zaletą opracowania jest duża liczba rysunków ułatwiających zrozumienie materiału.

W tym wydaniu wprowadzono drobne zmiany oraz poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy koleżankom i kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym studentom za uwagi o książce oraz wskazanie błędów w odpowiedziach.

Marian Gewert *Zbigniew Skoczylas*

Oznaczenia

W podręczniku stosujemy następujące oznaczenia zbiorów liczbowych:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ — zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ — zbiór liczb wymiernych,

$\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych.

1. Pojęcia wstępne

1.1. Elementy logiki matematycznej

Rachunek zdań

Zdaniem w logice nazywamy zdanie orzekające, o którym można stwierdzić, czy jest prawdziwe, czy też fałszywe. Zdania oznaczamy zwykle małymi literami alfabetu, np. p, q, r. Zdaniom prawdziwym przypisujemy wartość logiczną 1, a fałszywym 0.

Przykład 1.1. Zdania „$2 + 3 = 5$”, „liczba 12 nie jest podzielna przez 7” są prawdziwe. Z kolei zdania „$3 > 7$”, „funkcja $f(x) = x^2$ jest okresowa” są fałszywe. Sformułowania „$x^2 = 4$”, „funkcja g jest rosnąca” oraz „jestem głodny” nie są zdaniami w sensie logiki, gdyż ich wartość zależy odpowiednio od wartości x, od funkcji g oraz od osoby, która je wypowiada. Podobnie, stwierdzenie „może padać” nie jest zdaniem logicznym, gdyż nie można mu przypisać żadnej wartości logicznej.

Niżej określimy negację oraz podstawowe rodzaje spójników logicznych, którymi będziemy łączyć zdania.

Zdanie „nieprawda, że p” nazywamy *negacją* zdania p i oznaczamy symbolem $\sim p$. Negacja zdania jest prawdziwa, gdy zdanie jest fałszywe.

Zdanie „p lub q” nazywamy *alternatywą* zdań p, q i oznaczamy symbolem $p \vee q$. Alternatywa jest prawdziwa, gdy przynajmniej jedno ze zdań jest prawdziwe.

Zdanie „p albo q” nazywamy *alternatywą wykluczającą* zdań p, q i oznaczamy symbolem $p \veebar q$. Alternatywa wykluczająca jest prawdziwa, gdy tylko jedno ze zdań jest prawdziwe. Ten spójnik logiczny odgrywa ważną rolę w informatyce.

Zdanie „p i q” nazywamy *koniunkcją* zdań p, q i oznaczamy symbolem $p \wedge q$. Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa, gdy oba zdania są prawdziwe.

Zdanie „jeżeli p, to q” nazywamy *implikacją* i oznaczamy symbolem $p \Rightarrow q$. Implikacja jest prawdziwa, gdy zdania p oraz q są prawdziwe lub gdy zdanie p jest fałszywe, a zdanie q dowolne (tzn. fałszywe lub prawdziwe). W implikacji zdanie p nazywamy poprzednikiem, a zdanie q następnikiem.

Zdanie „p wtedy i tylko wtedy, gdy q” nazywamy *równoważnością* i oznaczamy symbolem $p \iff q$. Równoważność jest prawdziwa, gdy oba zdania mają tę samą wartość logiczną.

W tabelce podajemy wartości logiczne negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności w zależności od wartości logicznych zdań je tworzących.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \iff q$
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Przykład 1.2. Ocenić prawdziwość zdań:

(a) „nieprawda, że $3 \cdot 8 = 25$”; (b) „$5 > 6$ lub $3 > 2$”;

(c) „prosta $y = x$ jest równoległa do osi Ox albo jest równoległa do osi Oy”;

(d) „$2^3 = 8$ i $\sqrt{9999} = 99$”; (e) „$2 \geqslant 1 \iff 1 \geqslant 0$”;

(f)„ jeżeli liczba 33 jest podzielna przez 5, to liczba 66 jest podzielna przez 10”.

Rozwiązanie.

(a) Zdanie jest prawdziwe, bo zdanie „$3 \cdot 8 = 25$” jest fałszywe.

(b) Zdanie jest prawdziwe, bo jedno ze zdań alternatywy, tj. zdanie „$3 > 2$”, jest prawdziwe.

(c) Zdanie jest fałszywe, bo rozważana prosta nie jest równoległa do żadnej z osi.

(d) Zdanie jest fałszywe, bo jedno ze zdań koniunkcji, tj. zdanie „$\sqrt{9999} = 99$” jest fałszywe.

(e) Zdanie jest prawdziwe, bo oba zdania w równoważności są prawdziwe.

(f) Zdanie jest prawdziwe, bo poprzednik implikacji, tj. zdanie „liczba 33 jest podzielna przez 5” jest fałszywe.

Formułami rachunku zdań nazywamy wyrażenia składające się ze zmiennych zdaniowych $p, q, r, \ldots$, spójników logicznych (negacji, alternatywy, implikacji itd.) i ewentualnie nawiasów. Poniżej przykłady formuł zdaniowych:

$$(p \Rightarrow q) \iff [(\sim p) \vee q]; \qquad \sim [p \wedge (q \vee r)]; \qquad \sim q \Rightarrow (p \underline{\vee} q);$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q); \qquad [(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q; \qquad \sim [(p \vee q) \Rightarrow r]\,.$$

Przykład 1.3. „Andrzej zaliczył sprawdzian z matematyki” – p, „Andrzej zaliczył sprawdzian z fizyki” – q „Andrzej zaliczył sprawdzian z informatyki” – r. Wiemy, że zdanie „Jeśli Andrzej zaliczył sprawdzian z matematyki i nie zaliczył z fizyki, to nie zaliczył również sprawdzianu z informatyki” jest fałszywe. Czy można ustalić, który ze sprawdzianów zaliczył Andrzej?

Rozwiązanie. Sformułowane zdanie można zapisać następująco $(p \wedge \sim q) \Rightarrow\ \sim r$. Jak wiadomo implikacja jest fałszywa tylko w przypadku, gdy poprzednik, tj. zdanie $p \wedge \sim q$, jest prawdziwe, a następnik $\sim r$ – fałszywy. Koniunkcja $p \wedge \sim q$ jest prawdziwa tylko, gdy p jest zdaniem prawdziwym, a q – fałszywym. Z kolei zdanie $\sim r$ jest fałszywe, gdy zdanie r jest prawdziwe. Zatem Andrzej zaliczył sprawdzian tylko z matematyki i informatyki.

Prawami logicznymi nazywamy formuły, które są prawdziwe po podstawieniu dowolnych zdań w miejsca zmiennych zdaniowych. Poniżej podajemy zestawienie praw logicznych najczęściej wykorzystywanych w rozumowaniach.

Najważniejsze prawa logiczne

Prawo podwójnego zaprzeczenia $\sim (\sim p) \Longleftrightarrow p.$

Prawo zaprzeczenia implikacji $\sim (p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge (\sim q))\,.$

Prawo wyłączonego środka $p \vee (\sim p)\,.$

Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy

$$[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]\,.$$

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$\Big[p \vee (q \wedge r)\Big] \Longleftrightarrow \Big[(p \vee q) \wedge (p \vee r)\Big]\,.$$

Prawo przechodniości implikacji $\Big[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\Big] \Rightarrow (p \Rightarrow r)\,.$

Prawo de Morgana* dla alternatywy $\Big[\sim (p \vee q)\Big] \Longleftrightarrow \Big[(\sim p) \wedge (\sim q)\Big]\,.$

Prawo de Morgana dla koniunkcji $\Big[\sim (p \wedge q)\Big] \Longleftrightarrow \Big[(\sim p) \vee (\sim q)\Big]\,.$

Prawo Claviusa† $\Big[(\sim p) \Rightarrow p\Big] \Rightarrow p.$

Prawo transpozycji $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow \Big[(\sim q) \Rightarrow (\sim p)\Big]\,.$

Reguła odrywania $\Big[p \wedge (p \Rightarrow q)\Big] \Rightarrow q.$

Przykład 1.4. Zbadać, czy podane formuły rachunku zdań są prawami logicznymi:

(a) $p \Rightarrow\ (p \vee q)\,;$ (b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow\ (p \vee q)\,;$

(c) $[p \vee (\sim q)] \Rightarrow\ (p \wedge q)\,;$ (d) $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)].$

---

*Augustus De Morgan (1806–1871), matematyk i logik angielski.

†Christoph Clavius (1538–1612), matematyk i astronom włoski.

Rozwiązanie. Aby pokazać, że formuła rachunku zdań jest prawem logicznym, wykorzystamy tzw. metodę zero-jedynkową. W tym celu ustalimy wartość formuły dla wszystkich układów wartości logicznych jej zmiennych zdaniowych. Jeżeli w każdym przypadku wartość logiczna formuły będzie równa 1, to będzie ona prawem logicznym. Z drugiej strony dla wykazania, że formuła nie jest prawem logicznym, wystarczy wskazać jeden układ wartości logicznych zmiennych zdaniowych, dla których ma ona wartość 0. Wyniki przedstawimy w formie tabelki.

(a)

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Dla wszystkich układów wartości logicznych zdań p, q wartość logiczna badanej formuły jest równa 1. Zatem jest ona prawem logicznym.

(b)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \vee q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \vee q)$
0	0	1	1	1	0	0

Wskazaliśmy układ wartości logicznych zdań p, q, dla którego wartość logiczna badanej formuły jest równa 0. Zatem nie jest ona prawem logicznym.

(c)

p	q	$\sim q$	$p \vee (\sim q)$	$p \wedge q$	$[p \vee (\sim q)] \Rightarrow (p \wedge q)$
0	0	1	1	0	0

Także w tym przypadku wskazaliśmy układ wartości logicznych zdań p, q, dla którego wartość logiczna badanej formuły jest równa 0. Zatem nie jest ona prawem logicznym.

(d)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Dla wszystkich układów wartości logicznych zdań p, q wartość logiczna badanej formuły jest równa 1. Zatem jest ona prawem logicznym.

Funkcja zdaniowa

Niech X będzie zbiorem niepustym. *Funkcją zdaniową* zmiennej x nazywamy stwierdzenie $p(x)$, które staje się zdaniem logicznym, gdy w miejsce x podstawimy element zbioru X. Zbiór ten nazywamy dziedziną funkcji zdaniowej p. Zbiór tych elementów x ze zbioru X, dla których funkcja zdaniowa p jest prawdziwa, oznaczamy przez

$$\{x \in X : p(x)\} .$$

Funkcja zdaniowa może zależeć od większej liczby zmiennych.

Przykład 1.5. Zbiory określone za pomocą funkcji zdaniowej zapisać w prostszej postaci:

(a) $\left\{p \in \mathbb{Z} : p^2 < 5\right\}$; (b) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\right\}$;

(c) $\{x \in \mathbb{R} : (x < 3) \vee (x \geqslant 5)\}$; (d) $\{n \in \mathbb{R} : n$ – podzielne przez $5\}$;

(e) $\left\{x \in \mathbb{R} : (x > 0) \Rightarrow \left(x^2 > 0\right)\right\}$; (f) $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{N} \wedge x < y \wedge xyz = 8\}$.

Rozwiązanie. Po rozpatrzeniu warunków określających powyższe zbiory okaże się, że można je zapisać w postaci:

(a) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; (b) $\{-2, 2\}$; (c) $(-\infty, 3) \cup [5, \infty)$;

(d) $\{5, 10, 15, \ldots\}$; (e) $\mathbb{R}$; (f) $\{(1, 2, 4), (1, 4, 2), (1, 8, 1), (2, 4, 1)\}$.

Kwantyfikatory

Zwrot „dla każdego x" nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym* i oznaczamy symbolem

$$\bigwedge_{x}.$$

Do zapisu tego kwantyfikatora używa się także symbolu $\forall\, x$. Jeżeli chcemy podkreślić, że zakres zmiennej x w kwantyfikatorze ogólnym jest ograniczony do zbioru niepustego X, to używamy symbolu

$$\bigwedge_{x \in X}.$$

Na przykład stwierdzenie: dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie x^2 jest nieujemne, przy pomocy kwantyfikatora ogólnego zapisujemy następująco:

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \left(x^2 \geqslant 0\right).$$

Zamiast kilku kwantyfikatorów ogólnych stojących obok siebie można napisać jeden. Np. zamiast $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}}$ możemy napisać $\bigwedge_{x, y \in \mathbb{R}}$.

Z kolei zwrot „istnieje x" nazywamy *kwantyfikatorem szczegółowym* i oznaczamy symbolem

$$\bigvee_{x}.$$

Do zapisu tego kwantyfikatora używa się także symbolu $\exists\, x$. Jeżeli chcemy podkreślić, że zakres zmiennej x w kwantyfikatorze szczegółowym jest ograniczony do niepustego zbioru X, to używamy symbolu

$$\bigvee_{x \in X}.$$

Na przykład stwierdzenie: istnieje liczba rzeczywista x, która spełnia równanie $x^2 + 3x + 2 = 0$, zapisujemy następująco:

$$\bigvee_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Podobnie, jak wyżej, zamiast kilku kwantyfikatorów szczególnych stojących obok siebie można napisać jeden. Np. zamiast $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{m\in\mathbb{N}}$ możemy napisać $\bigvee_{n,m\in\mathbb{N}}$.

Przykład 1.6. Zbadać, czy podane funkcje zdaniowe z kwantyfikatorami są prawdziwe:

(a) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} |x|+1>0$; (b) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \sin^2 x+\cos^2 x=1$; (c) $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} x^2-x+1=0$;

(d) $\bigwedge_{a,b\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (ab)^n=a^n b^n$; (e) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} x+y>0$; (f) $\bigvee_{y\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x+y>0$.

Rozwiązanie.

(a) Funkcja zdaniowa jest prawdziwa. Wynika to z faktu, że dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$ mamy $|x|\geqslant 0$.

(b) Funkcja zdaniowa jest prawdziwa. Wynika, to z określenia funkcji trygonometrycznych sin i cos oraz z twierdzenia Pitagorasa[‡].

(c) Funkcja zdaniowa jest fałszywa. Ponieważ $\Delta=-3<0$, więc równanie kwadratowe nie ma rzeczywistych rozwiązań.

(d) Funkcja zdaniowa jest prawdziwa.

(e) Funkcja zdaniowa jest prawdziwa. Dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$ wystarczy przyjąć $y=1-x$.

(f) Funkcja zdaniowa jest fałszywa. Gdyby bowiem istniało takie $y\in\mathbb{R}$, to przyjmując $x=-1-y$, otrzymalibyśmy sprzeczność $x+y=-1>0$.

Najważniejsze prawa rachunku kwantyfikatorów

W poniższym zestawieniu symbol p oznacza funkcję zdaniową zmiennej $x\in X$, a q funkcję zdaniową zmiennych $x\in X,\ y\in Y$.

Prawo de Morgana dla kwantyfikatora ogólnego

$$\sim\left(\bigwedge_{x\in X} p(x)\right)\Longleftrightarrow\bigvee_{x\in X}\left[\sim p\left(x\right)\right].$$

Prawo de Morgana dla kwantyfikatora szczegółowego

$$\sim\left(\bigvee_{x\in X} p(x)\right)\Longleftrightarrow\bigwedge_{x\in X}\left[\sim p\left(x\right)\right].$$

Prawo przestawiania dla kwantyfikatorów ogólnych

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y} q(x,y)\Longleftrightarrow\bigwedge_{y\in Y}\bigwedge_{x\in X} q(x,y).$$

[‡]Pitagoras (772 p.n.e. – 497 p.n.e.), matematyk i filozof grecki.

Prawo przestawiania dla kwantyfikatorów szczegółowych

$$\bigvee_{x\in X}\bigvee_{y\in Y} q(x,y) \Longleftrightarrow \bigvee_{y\in Y}\bigvee_{x\in X} q(x,y).$$

Prawo przestawiania kwantyfikatora ogólnego ze szczegółowym

$$\bigvee_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y} q(x,y) \Longrightarrow \bigwedge_{y\in Y}\bigvee_{x\in X} q(x,y).$$

Uwaga.W ostatnim prawie implikacja w przeciwną stronę jest na ogół fałszywa. Tak jest np. dla zbiorów $X = Y = \mathbb{R}$ oraz funkcji zadaniowej $q(x, y)$: $x + y = 0$.

1.2. Aksjomaty, definicje, twierdzenia

Matematyka jest systemem dedukcyjnym, w którym z przyjętych aksjomatów lub wcześniej udowodnionych twierdzeń wyprowadza się nowe twierdzenia. W tym paragrafie podamy podstawowe informacje na ten temat. Nowe terminy wprowadzimy w sposób intuicyjny bez zbędnej formalizacji.

Pojęciami pierwotnymi nazywamy abstrakcyjne obiekty oraz stwierdzenia, których nie określamy. Np. w teorii mnogości pojęciami pierwotnymi są: zbiór, element zbioru oraz stwierdzenie „x jest elementem zbioru X”. Z kolei w geometrii euklidesowej takimi pojęciami są: punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń oraz stwierdzenie „punkt P należy do prostej l”.

Aksjomatem nazywamy zdanie opisujące zależność między pojęciami pierwotnymi, którego prawdziwość przyjmujemy bez dowodu. Rozważa się m. in. aksjomaty geometrii, arytmetyki, teorii mnogości. Poniżej podajemy przykładowe aksjomaty z teorii mnogości, z geometrii oraz z analizy matematycznej.

Przykład 1.7. (a) Aksjomat istnienia zbioru pustego. Istnieje zbiór, który nie zawiera żadnego elementu. Zbiór ten nazywamy pustym i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

(b) Aksjomat o prostej przechodzącej przez dwa punkty. Na płaszczyźnie przez każde dwa różne punkty można poprowadzić tylko jedną prostą.

(c) Aksjomat ciągłości zbioru liczb rzeczywistych. Każdy niepusty i ograniczony podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres dolny i górny.

Definicją nazywamy zdanie, które wprowadza nowe pojęcie lub symbol za pomocą wcześniej określonych terminów. Definicje wprowadzamy, gdy w rozważaniach wielokrotnie pojawiają się obiekty spełniające te same warunki. Upraszcza to formułowanie kolejnych pojęć i twierdzeń. Poniżej podajemy przykładowe definicje z teorii liczb, analizy oraz geometrii.

Przykład 1.8. (a) Mówimy, że liczba całkowita n jest podzielna przez niezerową liczbę całkowitą k, gdy istnieje liczba całkowita m taka, iż $n = k \cdot m$.

(b) Mówimy, że ciąg (a_n) jest rosnący, jeżeli dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_{n+1} > a_n$.

(c) Sferą o środku $S \in \mathbb{R}^3$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów przestrzeni $\mathbb{R}^3$, których odległość od środka jest równa r.

Twierdzeniem nazywamy zdanie udowodnione na postawie przyjętego układu aksjomatów z wykorzystaniem zasad wnioskowania w logice. Twierdzenia w matematyce najczęściej mają postać implikacji: „jeżeli p, to q". *Założeniem* twierdzenia nazywamy poprzednik p implikacji, a jego *tezą* — następnik q. W tej sytuacji mówimy także, że p jest *warunkiem wystarczającym* dla q lub, że q jest *warunkiem koniecznym* dla p.

Dowodem twierdzenia nazywamy ciąg skończony zdań, który zaczyna się od założenia, a kolejne zdania otrzymane są z poprzednich w wyniku wnioskowania dedukcyjnego, przyjętych aksjomatów, a także udowodnionych wcześniej twierdzeń i który prowadzi do tezy.

Uwaga. W podręcznikach twierdzenia czasem mają inną nazwę. Na przykład twierdzenie pomocnicze wykorzystane w dowodzie zasadniczego twierdzenia nazywamy *lematem*. Zaś fakt wynikający bezpośrednio z udowodnionego twierdzenia nazywamy *wnioskiem*. Studenci często z faktu, że nie jest spełnione założenie p twierdzenia „jeżeli p, to q" wyciągają błędny wniosek, iż teza q jest fałszywa. Np. w twierdzeniu: jeśli liczba naturalna n jest podzielna przez 6, to jest podzielna przez 3, podstawiają $n = 9$ i stwierdzają „skoro liczba 9 nie jest podzielna przez 6, to nie jest podzielna przez 3", co jest oczywiście fałszem.

Przykład 1.9. Sformułować twierdzenie w postaci implikacji ze wskazaniem założenia i tezy:

(a) twierdzenie Pitagorasa;

(b) kwadrat nieparzystej liczby naturalnej jest postaci $4k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$;

(c) wzory Viete'a.

Rozwiązanie.

(a) Twierdzenie: „jeżeli trójkąt jest prostokąty, to suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej".

Założenie: trójkąt jest prostokątny, teza: suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

(b) Twierdzenie: „jeżeli liczba naturalna n jest nieparzysta, to jej kwadrat ma postać $4k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$".

Założenie: liczba naturalna n jest nieparzysta, teza: $n^2 = 4k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

(c) Twierdzenie: „jeżeli x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$, to $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$".
Założenie: x_1, x_2 – pierwiastki trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$, teza: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
Twierdzenia mogą mieć inną formę niż implikacja. Poniżej podajemy kilka twierdzeń innej postaci.

Przykład 1.10. (a) Liczba naturalna zapisana w układzie dziesiętnym jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9. To twierdzenie ma postać równoważności. Forma ta jest koniunkcją dwóch twierdzeń w postaci implikacji: „jeżeli p, to q" i „jeżeli q, to p".
(b) Równanie $x^x = 2$ ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych.
To twierdzenie ma formę funkcji zdaniowej z kwantyfikatorem szczegółowym:

$$\bigvee_{x\in\mathbb{R}} x^x = 2.$$

(c) Dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Z kolei to twierdzenie ma formę funkcji zdaniowej z kwantyfikatorem ogólnym:

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

1.3. Elementy teorii zbiorów

Zbiór jest pojęciem pierwotnym, którego nie definiujemy. Zbiory oznaczamy zwykle dużymi literami alfabetu, a ich elementy małymi. Fakt, że x jest elementem zbioru A zapisujemy symbolicznie $x \in A$. Jeżeli y nie jest elementem tego zbioru, to piszemy $y \notin A$. Zbiór określamy zwykle przez wyliczenie elementów lub przez podanie warunku W, który one spełniają. Piszemy wtedy

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \quad \text{lub} \quad \{x : W(x)\}.$$

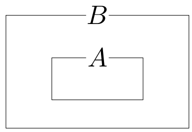
Zbiór, który nie ma żadnego elementu, nazywamy pustym i oznaczamy przez $\emptyset$. Poniżej przykłady zbiorów:

{złoto, srebro, brąz}; $\{x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 5\}$;
$\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$; $\{n : n$ jest liczbą naturalną podzielną przez $11\}$.

Mówimy, że dwa zbiory są równe, gdy mają te same elementy. Zatem

$$A = B \Longleftrightarrow \bigwedge_{x} \Big[(x \in A) \Longleftrightarrow (x \in B)\Big].$$

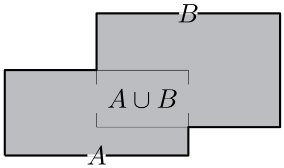
Jeżeli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, to mówimy, że A jest *podzbiorem* B (rys.). Fakt ten zapisujemy symbolicznie w postaci $A \subset B$. Mamy zatem



$$A \subset B \iff \bigwedge_x \Big[(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)\Big].$$

Jeśli przy tym $A \neq B$, to mówimy, że A jest podzbiorem właściwym B. Oczywiście $\emptyset \subset A$ oraz $A \subset A$ dla każdego zbioru A.

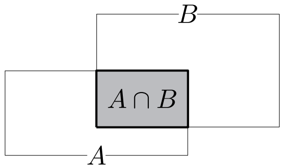
Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór, który składa się z wszystkich elementów zbioru A oraz wszystkich elementów zbioru B (rys.). Sumę zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \cup B$. Mamy zatem



$$(x \in A \cup B) \iff \Big[(x \in A) \vee (x \in B)\Big].$$

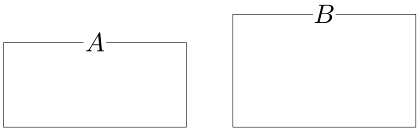
W podobny sposób określa się sumę dowolnej liczby zbiorów.

Iloczynem (przekrojem albo częścią wspólną) zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony tylko z tych elementów, które należą do zbioru A i do zbioru B (rys.). Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \cap B$. Mamy zatem



$$(x \in A \cap B) \iff \Big[(x \in A) \wedge (x \in B)\Big].$$

W podobny sposób określa się iloczyn dowolnej liczby zbiorów.
Mówimy, że zbiory A i B są *rozłączne*, gdy ich iloczyn jest zbiorem pustym, tj. $A \cap B = \emptyset$.



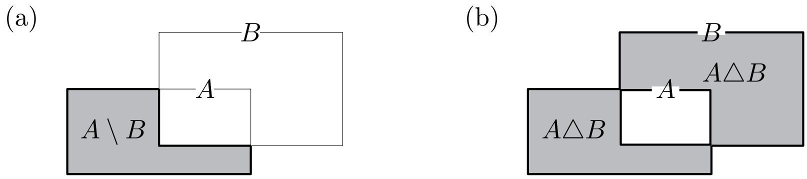
Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony tylko z tych elementów zbioru A, które nie należą do B (rys. (a)). Różnicę zbiorów A i B oznaczamy przez $A \setminus B$. Mamy zatem

$$(x \in A \setminus B) \iff \Big[(x \in A) \wedge (x \notin B)\Big].$$

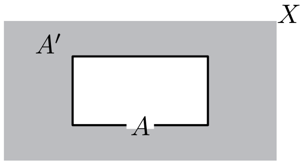
Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (rys.

(b)). Zbiór ten oznaczamy przez $A \triangle B$. Mamy zatem

$$(x \in A \triangle B) \iff \Big\{\Big[(x \in A) \wedge (x \notin B)\Big] \vee \Big[(x \notin A) \wedge (x \in B)\Big]\Big\}.$$



Niech X będzie ustalonym zbiorem zwanym przestrzenią oraz niech A będzie dowolnym podzbiorem tej przestrzeni. *Dopełnieniem* zbioru A względem X nazywamy zbiór $X \setminus A$ i oznaczamy go symbolem A' (rys.). Mamy zatem



$$(x \in A') \iff (\sim (x \in A)).$$

Oczywiście $(A')' = A$. Ponadto, $\emptyset' = X$ i $X' = \emptyset$.

Własności działań na zbiorach

Przemienność sumy, przekroju oraz różnicy symetrycznej zbiorów:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A, \qquad A \triangle B = B \triangle A.$$

Prawa de Morgana dla sumy i przekroju zbiorów:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Rozdzielność sumy i przekroju zbiorów:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Przechodniość zawierania zbiorów:

$$[(A \subset B) \wedge (B \subset C)] \Longrightarrow (A \subset C).$$

Warunek równoważny równości zbiorów:

$$\Big[(A \subset B) \wedge (B \subset A)\Big] \iff (A = B).$$

Zawieranie zbiorów i ich dopełnień: $A \subset B \iff B' \subset A'$.
Rozłączność zbioru i jego dopełnienia: $A \cap A' = \emptyset$.
Uzupełnienie zbioru do przestrzeni: $A \cup A' = X$.

Przykład 1.11. Dane są zbiory

$$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}, \quad C = \{1, 2, 5, 6, 9, 10, \ldots\}\,.$$

Wyznaczyć zbiory:

(a) $A \cup B$; (b) $A \cap B$; (c) $A \setminus B$; (d) $C \setminus A$; (e) $A \triangle B$.

Rozwiązanie. Mamy:

(a) $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \cup \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \mathbb{N}$;

(b) $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \cap \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \emptyset$;

(c) $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \setminus \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = A$;

(d) $C \setminus A = \{1, 2, 5, 6, 9, 10, \ldots\} \setminus \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = \{2, 6, 10, \ldots\}$;

(e) $A \triangle B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \triangle \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \mathbb{N}$.

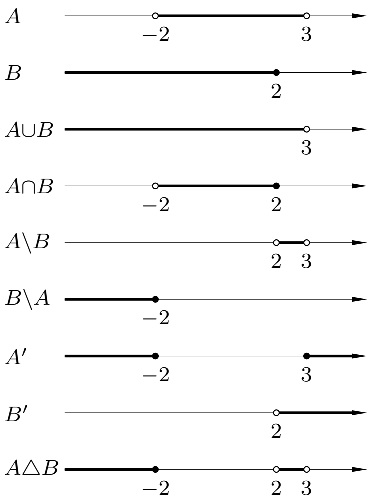
Przykład 1.12. W przestrzeni $\mathbb{R}$ dla podanych par zbiorów A, B wykonać działania:

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A', B', $A \triangle B$, gdzie

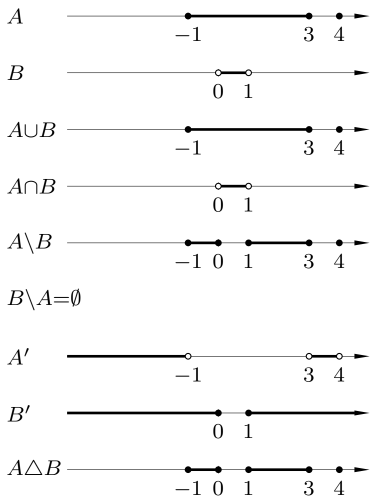
(a) $A = (-2, 3)$, $B = (-\infty, 2]$; (b) $A = [-1, 3] \cup \{4\}$, $B = (0, 1)$.

Rozwiązanie.

(a)



(b)



Iloczyn kartezjański

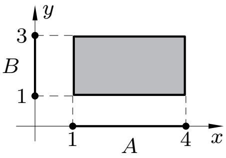
Iloczynem kartezjańskim (produktem) zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) takich, że $x \in A$ oraz $y \in B$. Iloczyn kartezjański zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \times B$. Mamy zatem

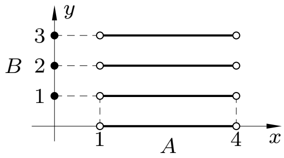
$$A \times B \;=\; \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}\,.$$

W podobny sposób określa się iloczyn kartezjański większej liczby zbiorów. Jeżeli $A = B$, to zamiast $A \times A$ będziemy pisali A^2, np. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Przykład 1.13. Dla podanych par zbiorów w $\mathbb{R}$ narysować iloczyn kartezjański $A \times B$:
(a) $A = [1, 4]$, $B = [1, 3]$; (b) $A = (1, 4)$, $B = \{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie.

(a) 

(b) 

1.4. Działania algebraiczne

Potęgi

W tym paragrafie określimy potęgę a^b dla liczb rzeczywistych a, b. Najpierw zdefiniujemy potęgę o wykładniku naturalnym. Dla $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ przyjmujemy

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}} \qquad \text{oraz} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1, \quad \text{gdy } a \neq 0.$$

Teraz określimy pierwiastek arytmetyczny. I tak, *pierwiastkiem arytmetycznym* stopnia $n \in \mathbb{N}$ z nieujemnej liczby rzeczywistej a nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą c taką, że $c^n = a$. Piszemy wówczas $c = \sqrt[n]{a}$. Mamy zatem

$$\sqrt[n]{a} = c \iff c^n = a.$$

Pierwiastek stopnia 2 nazywamy *pierwiastkiem kwadratowym* i oznaczamy symbolem $\sqrt{a}$. Pierwiastek stopnia 3 nazywamy *pierwiastkiem sześciennym*. Dla dowolnych liczb naturalnych n, m oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, $b \geqslant 0$, zachodzą wzory:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \text{gdzie } b > 0, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Można rozszerzyć definicję pierwiastka arytmetycznego stopnia nieparzystego na liczby ujemne przyjmując, że dla $a < 0$ pierwiastek jest określony wzorem:

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}.$$

Przechodzimy do określenia potęgi wymiernej liczby rzeczywistej. Potęgę o podstawie $a \geqslant 0$ i dodatnim wykładniku wymiernym p/q, gdzie liczby naturalne p, q są względnie pierwsze, określamy wzorem:

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

Dla $a > 0$ oraz ujemnego wykładnika wymiernego w przyjmujemy

$$a^w = \frac{1}{a^{-w}}.$$

Ponadto, dla $a < 0$ oraz wymiernego wykładnika p/q, gdzie liczby całkowite p, q są względnie pierwsze, a q jest liczbą nieparzystą, przyjmujemy

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(-\sqrt[q]{-a}\right)^p.$$

Niech teraz a będzie liczbą dodatnią, a wykładnik b liczbą niewymierną. Ponadto, niech $b_1, b_2, b_3, \ldots$ będzie ciągiem liczb wymiernych, którego granicą jest b. Potęgę a^b określamy jako granicą ciągu

$$a^{b_1}, a^{b_2}, a^{b_3}, \ldots$$

Można pokazać, że granica ta istnieje i nie zależy od wyboru ciągu b_1, b_2, b_3 ... Na przykład $2^{\sqrt{2}}$ jest granicą ciągu, którego kolejnymi wyrazami są

$$\begin{aligned} 2^{1.4} &= 2.639015821\ldots \\ 2^{1.41} &= 2.657371628\ldots \\ 2^{1.414} &= 2.664749650\ldots \\ 2^{1.4142} &= 2.665119088\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tu 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, ... jest ciągiem kolejnych dziesiętnych przybliżeń wymiernych $\sqrt{2}$.

Własności potęg

Niech a, b, x, y będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, przy czym $a, b > 0$. Wtedy:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, **2.** $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, **3.** $a^x \cdot b^x = (ab)^x$,

4. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$, **5.** $(a^x)^y = a^{xy}$, **6.** $a^{-x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$.

Przykład 1.14. Zapisać w prostszej postaci:

(a) $\sqrt{128}$; (b) $\sqrt{8 \cdot \sqrt[3]{8 \cdot \sqrt[4]{8 \cdot \sqrt[5]{8}}}}$;

(c) $4 \cdot 4^{10} + 3 \cdot 4^{11} + 4^{12}$; (d) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} + \sqrt{72}$.

Rozwiązanie.
(a) Mamy

$$\sqrt{128} = \sqrt{2^7} = \left(2^7\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{7\cdot\frac{1}{2}} = 2^{3\frac{1}{2}} = 2^{3+\frac{1}{2}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{2}.$$

(b) Mamy kolejno

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{8} &= 8^{\frac{1}{5}},\\
8\cdot\sqrt[5]{8} &= 8\cdot 8^{\frac{1}{5}} = 8^{1+\frac{1}{5}} = 8^{\frac{6}{5}},\\
\sqrt[4]{8\cdot\sqrt[5]{8}} &= \sqrt[4]{8^{\frac{6}{5}}} = \left(8^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{4}} = 8^{\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}} = 8^{\frac{6}{20}} = 8^{\frac{3}{10}},\\
8\cdot\sqrt[4]{8\cdot\sqrt[5]{8}} &= 8\cdot 8^{\frac{3}{10}} = 8^{\frac{3}{10}+1} = 8^{\frac{13}{10}},\\
\sqrt[3]{8\cdot\sqrt[4]{8\cdot\sqrt[5]{8}}} &= \sqrt[3]{8^{\frac{13}{10}}} = \left(8^{\frac{13}{10}}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{13}{10}\cdot\frac{1}{3}} = 8^{\frac{13}{30}},\\
8\cdot\sqrt[3]{8\cdot\sqrt[4]{8\cdot\sqrt[5]{8}}} &= 8\cdot 8^{\frac{13}{30}} = 8^{\frac{13}{30}+1} = 8^{\frac{43}{30}}.
\end{aligned}$$

Zatem ostatecznie

$$\sqrt{8\cdot\sqrt[3]{8\cdot\sqrt[4]{8\cdot\sqrt[5]{8}}}} = \left(8^{\frac{43}{30}}\right)^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{43}{30}\cdot\frac{1}{2}} = 8^{\frac{43}{60}} = \left(2^3\right)^{\frac{43}{60}} = 2^{\frac{43}{20}}.$$

(c) Mamy

$$\begin{aligned}
4\cdot 4^{10} + 3\cdot 4^{11} + 4^{12} &= 4\cdot 4^{10} + 3\cdot 4^{10+1} + 4^{10+2} = 4\cdot 4^{10} + 3\cdot 4\cdot 4^{10} + 4^2\cdot 4^{10}\\
&= 4\cdot 4^{10} + 12\cdot 4^{10} + 16\cdot 4^{10} = (4+12+16)\,4^{10} = 32\cdot 4^{10}\\
&= 2\cdot 16\cdot 4^{10} = 4^{\frac{1}{2}}\cdot 4^2\cdot 4^{10} = 4^{\frac{1}{2}+2+10} = 4^{\frac{25}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{25}{2}} = 2^{25}.
\end{aligned}$$

(d) Mamy

$$\begin{aligned}
\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}+\sqrt{72} &= \sqrt{4\cdot 2}+\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}+\sqrt{36\cdot 2}\\
&= \sqrt{4}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{25}\sqrt{2}+\sqrt{36}\sqrt{2}\\
&= 2\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{2}+5\sqrt{2}+6\sqrt{2}\\
&= (2+3+5+6)\sqrt{2} = 16\cdot\sqrt{2} = 2^4\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{4+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{9}{2}}.
\end{aligned}$$

Przykład 1.15. Uprościć wyrażenia:

(a) $4^x\cdot 2^y$; (b) $\dfrac{3^x}{81^y}$; (c) $\dfrac{2^x\cdot 3^y}{6^z}$;

(d) $\sqrt[3]{27^x}$; (e) $2^{3x}\cdot 5^{-x}$; (f) $\dfrac{(2x^4)\left(3x^2\right)^2}{\left(x^3\right)^4}$, gdzie $x\neq 0$.

Rozwiązanie. Korzystając z własności potęg mamy:

(a) $4^x\cdot 2^y = \left(2^2\right)^x\cdot 2^y = 2^{2x}\cdot 2^y = 2^{2x+y}$;

(b) $\dfrac{3^x}{81^y} = \dfrac{3^x}{\left(3^4\right)^y} = \dfrac{3^x}{3^{4y}} = 3^{x-4y}$;

(c) $\dfrac{2^x \cdot 3^y}{6^z} = \dfrac{2^x \cdot 3^y}{(2 \cdot 3)^z} = \dfrac{2^x \cdot 3^y}{2^z \cdot 3^z} = 2^{x-z} \cdot 3^{y-z};$

(d) $\sqrt[3]{27^x} = \left[\left(3^3\right)^x\right]^{\frac{1}{3}} = 3^{3 \cdot x \cdot \frac{1}{3}} = 3^x;$

(e) $2^{3x} \cdot 5^{-x} = \left(2^3\right)^x \cdot \left(5^{-1}\right)^x = 8^x \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^x = \left(\dfrac{8}{5}\right)^x;$

(f) $\dfrac{\left(2x^4\right)\left(3x^2\right)^2}{\left(x^3\right)^4} = \dfrac{\left(2x^4\right)\left(3^2 x^{2\cdot 2}\right)}{x^{3\cdot 4}} = \dfrac{18x^{4+4}}{x^{12}} = 18x^{8-12} = 18x^{-4} = \dfrac{18}{x^4}.$

Przekształcenia algebraiczne

W tej części paragrafu podamy kilka użytecznych wzorów pozwalających na upraszczanie skomplikowanych wyrażeń algebraicznych. Wzory te będziemy wykorzystywali m.in. przy obliczaniu granic ciągów i funkcji. Następnie omówimy metody uwalniania ułamków od niewymierności w mianowniku. Na końcu podamy wzory pozwalające na „wyciąganie" lub „wprowadzanie" wyrażeń algebraicznych spod lub pod pierwiastki.

Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną oraz niech a, b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right).$$

W szczególności:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), \\ a^3 - b^3 &= (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right), \\ a^4 - b^4 &= (a-b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right). \end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie można rozłożyć na czynniki inaczej:

$$a^4 - b^4 = \left(a^2\right)^2 - \left(b^2\right)^2 = \left(a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2\right) = (a-b)(a+b)\left(a^2 + b^2\right).$$

Teraz niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną **nieparzystą** oraz niech a, b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy zachodzi wzór:

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right).$$

W szczególności:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right), \\ a^5 + b^5 &= (a+b)\left(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4\right), \\ a^7 + b^7 &= (a+b)\left(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6\right). \end{aligned}$$

Przykład 1.16. Uprościć wyrażenia:

(a) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$; (b) $\dfrac{a^3+27b^3}{a^5+243b^5}$; (c) $\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^6+y^6}$; (d) $\dfrac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$.

Rozwiązanie. W obliczeniach wykorzystamy podane wcześniej wzory.

(a) Dla $x \neq 2$ oraz $x \neq -2$ mamy

$$\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{x^3-2^3}{x^2-2^2} = \frac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+2^2\right)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2}.$$

(b) Dla $a \neq -3b$ mamy

$$\frac{a^3+27b^3}{a^5+243b^5} = \frac{a^3+(3b)^3}{a^5+(3b)^5} = \frac{\cancel{(a+3b)}\left(a^2-a\,(3b)+(3b)^2\right)}{\cancel{(a+3b)}\left(a^4-a^3\,(3b)+a^2\,(3b)^2-a\,(3b)^3+(3b)^4\right)}$$

$$= \frac{a^2-3ab+9b^2}{a^4-3a^3b+9a^2b^2-27ab^3+81b^4}.$$

(c) Dla x, y nie równych jednocześnie 0 mamy

$$\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^6+y^6} = \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2\right)^3+\left(y^2\right)^3} = \frac{\left(x^2+y^2\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\left(x^2+y^2\right)}\left(\left(x^2\right)^2-x^2y^2+\left(y^2\right)^2\right)}$$

$$= \frac{x^2+y^2}{x^4-x^2y^2+y^4}.$$

(d) Dla $x \geqslant 0$ oraz $x \neq 1$ mamy

$$\frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}} = \frac{(x-1)(x+1)}{1-\sqrt{x}} = \frac{\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-1\right)(x+1)}{1-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)}\left(\sqrt{x}+1\right)(x+1)}{-\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)}} = -\left(\sqrt{x}+1\right)(x+1)\,.$$

Wzory podane na początku wykorzystujemy także do uwalniania wyrażeń algebraicznych od niewymierności, tj. do zapisywania ich w postaci nie zawierającej pierwiastków w mianowniku. Zilustrujemy to na kilku przykładach.

Przykład 1.17. Podane wyrażenia uwolnić od niewymierności w mianowniku:

(a) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{2}}$; (b) $\dfrac{11}{5-\sqrt{3}}$; (c) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; (d) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}+1}$.

Rozwiązanie. Mamy:

(a) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{6}{\sqrt[4]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \dfrac{6 \cdot \sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}} = \dfrac{6 \cdot \sqrt[4]{8}}{2} = 3\sqrt[4]{8}$;

(b) $\dfrac{11}{5-\sqrt{3}} = \dfrac{11}{5-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \dfrac{11\left(5+\sqrt{3}\right)}{5^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{11\left(5+\sqrt{3}\right)}{22} = \dfrac{1}{2}\left(5+\sqrt{3}\right)$;

(c) $$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2} = 5-2\sqrt{6};$$

(d) $$\frac{5}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}+1} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - \sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - \sqrt[3]{2}+1} = \frac{5\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+1^3} = \frac{5}{3}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right).$$

Przechodzimy do omówienia wzorów do upraszczania wyrażeń pierwiastkowych. Niech x, y będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Wtedy

$$\sqrt[n]{x^n y} = x\sqrt[n]{y}.$$

Jeżeli n jest liczbą **nieparzystą**, to powyższy wzór można stosować dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y. Jeśli zaś n jest liczbą **parzystą**, a y liczbą nieujemną, to

$$\sqrt[n]{x^n y} = \begin{cases} -x\sqrt[n]{y} & \text{dla} \quad x < 0, \\ x\sqrt[n]{y} & \text{dla} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Przykład 1.18. Uprościć wyrażenia:

(a) $\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$ $(x < 0)$; (b) $\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant y)$;

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x-1)^2}$ $(x \neq 1)$; (d) $\dfrac{\sqrt{x^3y}-\sqrt{xy^3}}{x-y}$ $(x, y < 0,\ x \neq y)$.

Rozwiązanie.

(a) Dla $x < 0$ mamy

$$\frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x} = -\sqrt{\frac{x^2\left(x^2+1\right)}{x^2}} = -\sqrt{x^2+1}.$$

(b) Dla $0 \leqslant x \leqslant y$ mamy

$$\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x^2+2xy+y^2} = \sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(x+y)^2} = -(x-y)+(x+y) = 2y.$$

(c) Dla $x \neq 1$ mamy

$$\frac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x-1)^2} = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^7}{\left((x-1)^2\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^7}{(x-1)^6}} = \sqrt[3]{x-1}.$$

s (d) Dla $x, y < 0$ oraz $x \neq y$ mamy

$$\frac{\sqrt{x^3y}-\sqrt{xy^3}}{x-y} = \frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}\right)}{x-y} = \frac{\sqrt{xy}(-x+y)}{x-y} = -\sqrt{xy}.$$

1.5. Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej określamy wzorem

$$|x| = \begin{cases} x \text{ dla } x \geqslant 0, \\ -x \text{ dla } x < 0. \end{cases}$$

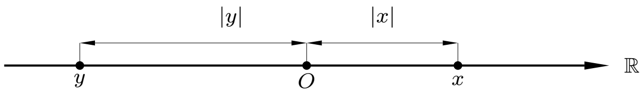
Dla przykładu $|2| = 2$, $|-1| = 1$, $|0| = 0$.
Niech x, y będą liczbami rzeczywistymi, a n liczbą naturalną. Wtedy:

1. $|-x| = |x|$, **2.** $|x| \geqslant 0$, $\quad |x| = 0 \iff x = 0$,

3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\quad |x^n| = |x|^n$, **4.** $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, o ile $y \neq 0$,

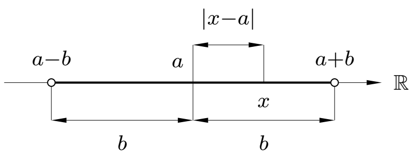
5. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, **6.** $\sqrt{x^2} = |x|$.

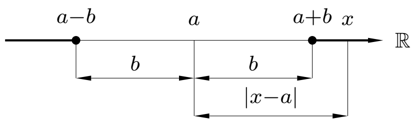
Wartość bezwzględna ma następującą interpretację geometryczną na osi liczbowej: $|x|$ jest odległością punktu x od punktu O (rys.).



Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą, a b dowolną liczbą dodatnią. Z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej wynikają następujące równoważności:

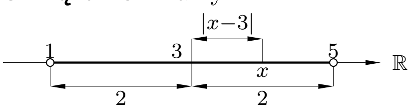
$$|x - a| < b \iff a - b < x < a + b, \quad |x - a| \geqslant b \iff x \leqslant a - b \text{ lub } x \geqslant a + b.$$



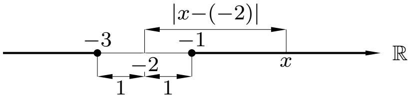


Przykład 1.19. Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej rozwiązać nierówności:
(a) $|x - 3| < 2$; (b) $|x + 2| \geqslant 1$; (c) $|2x - 5| \leqslant 4$; (d) $|x - 1| > |x + 3|$.

Rozwiązanie. Mamy:

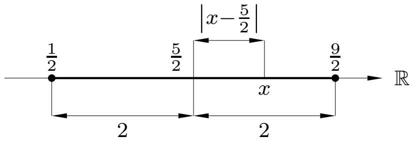
(a) 

$|x - 3| < 2 \iff 1 < x < 5$;

(b) 

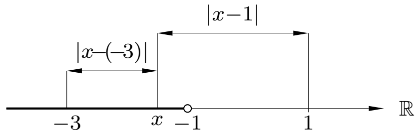
$|x + 2| \geqslant 1 \iff x \leqslant -3$ lub $x \geqslant -1$.

(c) Ponieważ $|2x-5| \leqslant 4 \iff 2\left|x-\frac{5}{2}\right| \leqslant 4 \iff \left|x-\frac{5}{2}\right| \leqslant 2$, więc



$$|2x-5| \leqslant 4 \iff \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9}{2}.$$

(d)



$$|x-1| > |x+3| \iff x < -1.$$

1.6. Indukcja matematyczna

Indukcja matematyczna jest jedną z metod dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych. Stosujemy ją m.in. do uzasadniania podzielności liczb, dowodzenia tożsamości, pokazywania nierówności. Niżej sformułujemy zasadę indukcji matematycznej oraz podamy przykłady jego zastosowań.

Indukcja matematyczna

Niech $T(n)$ będzie funkcją zdaniową zmiennej naturalnej n oraz niech n_0 będzie ustaloną liczbą naturalną. Wówczas, jeżeli

1. zdanie $T(n_0)$ jest prawdziwe,
2. dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$ prawdziwa jest implikacja

$$T(n) \Longrightarrow T(n+1),$$

to funkcja zdaniowa $T(n)$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$.

Uwaga. Z faktu, że funkcja zdaniowa $T(n)$ jest prawdziwa dla wielu początkowych liczb naturalnych **nie wynika**, że jest ona prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych. Np. nierówność $n^2 < 100n+1$ zachodzi dla $n = 1, 2, 3, \ldots 100$, ale nie jest prawdziwa dla pozostałych liczb naturalnych.

Przykład 1.20. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą równości:

(a) $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$; (b) $\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)} = 2^n$;

(c) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Rozwiązanie.

(a) Dla $n=1$ równość jest spełniona, gdyż mamy $1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$. Załóżmy, że równość zachodzi dla liczby naturalnej n, tzn.

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Pokażemy, że zachodzi ona także dla $n+1$. Mamy

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 \left[\begin{smallmatrix}\text{zał.}\\ \text{ind.}\end{smallmatrix}\right] &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2\left[n^2 + 4(n+1)\right]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Zatem równość jest prawdziwa dla $n+1$. Z zasady indukcji matematycznej wynika, że równość zachodzi dla każdego naturalnego n.

(b) Dla $n = 1$ równość jest spełniona, gdyż $\dfrac{2}{1} = 2^1$. Załóżmy, że równość zachodzi dla liczby naturalnej n, tzn.

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)} = 2^n.$$

Pokażemy, że zachodzi ona także dla $n+1$, tzn.

$$\frac{(n+2)(n+3)\ldots(2n)(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)} = 2^{n+1}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} &\frac{(n+2)(n+3)\ldots(2n)(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)} = \\ &\qquad = \frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{(n+2)(n+3)\ldots(2n)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+1)} \\ &\qquad = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(2n+1)} \left[\begin{smallmatrix}\text{zał.}\\ \text{ind.}\end{smallmatrix}\right] = 2^n\cdot 2 = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Zatem równość jest prawdziwa dla $n+1$. Z zasady indukcji matematycznej wynika, że zachodzi ona dla dowolnej liczby naturalnej n.

(c) Sprawdzamy, czy równość zachodzi dla $n = 1$. Mamy $\dfrac{1}{1\cdot 2} = \dfrac{1}{1+1}$, czyli jest prawdziwa. Załóżmy teraz, że równość jest prawdziwa dla liczby naturalnej n, tzn.

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Pokażemy, że jest ona prawdziwa także dla $n+1$. Mamy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\begin{smallmatrix}\text{zał.}\\ \text{ind.}\end{smallmatrix}\right] = \\ &\qquad = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Zatem równość jest prawdziwa dla $n+1$. Z zasady indukcji matematycznej wynika, że zachodzi ona dla dowolnej liczby naturalnej n.

Przykład 1.21. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba:
(a) $8^n + 6$ jest podzielna przez 7; (b) $n^5 - n$ jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie.
(a) Sprawdzamy, czy hipoteza o podzielności jest prawdziwa dla $n = 1$. Mamy $8^1 + 6 = 14 = 2 \cdot 7$, zatem hipoteza jest prawdziwa. Załóżmy teraz, że hipoteza jest prawdziwa dla liczby naturalnej n. Wtedy istnieje liczba całkowita p taka, że $8^n + 6 = 7p$. Pokażemy, że jest ona prawdziwa także dla $n+1$. Mamy

$$8^{n+1} + 6 = (7+1)8^n + 6 = 8^n + 6 + 7 \cdot 8^n \overset{\left[\substack{\text{zał.}\\\text{ind.}}\right]}{=} 7p + 7 \cdot 8^n = 7\left(p + 8^n\right),$$

czyli liczba $8^{n+1} + 6$ także jest podzielna przez 7. Z twierdzenia o indukcji matematycznej wynika, że dla każdego naturalnego n liczba $8^n + 6$ jest podzielna przez 7.
(b) Sprawdzamy, czy hipoteza o podzielności przez 5 jest prawdziwa dla $n = 1$. Mamy $1^5 - 1 = 0$, zatem hipoteza jest prawdziwa. Załóżmy teraz, że hipoteza jest prawdziwa dla liczby naturalnej n. Wtedy istnieje liczba całkowita p taka, że $n^5 - n = 5p$. Pokażemy, że jest ona prawdziwa także dla $n+1$. Mamy

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 \\ &= \left(n^5 - n\right) + 5\left(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n\right) \overset{\left[\substack{\text{zał.}\\\text{ind.}}\right]}{=} \\ &= 5p + 5\left(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n\right) = 5\left(p + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n\right).\end{aligned}$$

Ponieważ liczba $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$ jest całkowita, więc liczba $(n+1)^5 - (n+1)$ jest podzielna przez 5. Zatem hipoteza jest prawdziwa dla $n+1$. Z twierdzenia o indukcji matematycznej wynika, że liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5 dla dowolnej liczby naturalnej n.

Przykład 1.22.
(a) Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

(b) Pokazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \geqslant -1$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest **nierówność Bernoulliego**[§]

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

(c) Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 6$ zachodzi nierówność

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Rozwiązanie.
(a) Sprawdzimy, czy dla $n = 1$ nierówność jest prawdziwa. Mamy $\frac{1}{1^2} \leqslant 2 - \frac{1}{1}$,

[§]Jacob Bernoulli (1652–1705), matematyk i fizyk szwajcarski.

zatem nierówność jest prawdziwa. Załóżmy teraz, że nierówność ta zachodzi dla liczby naturalnej n, tzn.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}.$$

Pokażemy, że zachodzi ona także dla liczby $n+1$. Z założenia indukcyjnego mamy

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\left[{}^{\text{zał.}}_{\text{ind.}}\right]\leqslant$$

$$\leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}=2-\frac{(n+1)^2-n}{n(n+1)^2}=2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}$$

$$=2-\left(\frac{n^2+n}{n(n+1)^2}+\frac{1}{n(n+1)^2}\right)=2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}.$$

Zatem nierówność jest prawdziwa także dla $n+1$. Z twierdzenia o indukcji matematycznej wynika, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n.

(b) Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą z przedziału $[-1,\infty)$. Sprawdzimy, czy dla $n=1$ nierówność Bernoulliego jest prawdziwa. Mamy

$$(1+x)^1=1+x\geqslant 1+1x,$$

zatem nierówność jest prawdziwa. Załóżmy teraz, że nierówność ta zachodzi dla liczby naturalnej n. Pokażemy, że zachodzi ona także dla liczby $n+1$. Z założenia mamy

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx.$$

Po pomnożeniu obu stron nierówności przez $1+x\geqslant 0$ otrzymamy

$$(1+x)^{n+1}\geqslant (1+nx)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2\geqslant 1+(n+1)x,$$

gdyż $nx^2\geqslant 0$. Zatem nierówność Bernoulliego jest prawdziwa także dla $n+1$. Z twierdzenia o indukcji matematycznej wynika zatem, że nierówność Bernoulliego jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnej liczby rzeczywistej $x\geqslant -1$.

Uwaga. Równość w nierówności Bernoulliego zachodzi tylko dla $n=1$ i $x\geqslant -1$ oraz dla $n\geqslant 2$ i $x=0$.

(c) Dla $n=6$ mamy $6!=720$ oraz $\left(\frac{6}{2}\right)^6=729$, zatem nierówność jest prawdziwa. Załóżmy teraz, że nierówność zachodzi dla liczby naturalnej $n\geqslant 6$, tzn.

$$n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Pokażemy, że nierówność ma miejsce także dla $n+1$. Z założenia mamy

$$(n+1)!=n!(n+1)\left[{}^{\text{zał.}}_{\text{ind.}}\right]<\left(\frac{n}{2}\right)^n(n+1).$$

Aby zakończyć dowód wystarczy uzasadnić pomocniczą nierówność

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n(n+1)\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1},$$

która z kolei jest równoważna nierówności

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geqslant 2.$$

Nierówność ta jest szczególnym przypadkiem nierówności Bernoulliego $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, w której przyjęto $x = 1/n$. Zatem mamy

$$(n+1)! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1},$$

czyli rozważana nierówność zachodzi także dla $n+1$. Z zasady indukcji matematycznej wynika, że nierówność jest prawdziwa dla każdego $n \geqslant 6$.

1.7. Dwumian Newtona

Symbol sumy

Niech liczby całkowite k, l będą nieujemne oraz niech spełniają nierówność $k \leqslant l$. Sumę $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_l$ zapisujemy krótko w postaci $\sum\limits_{n=k}^{l} a_n$ i czytamy: suma a_n, gdzie n zmienia się od k do l. Zmienną n nazywamy indeksem sumy, a liczby k, l zakresami sumowania.

Własności symbolu sumy:

$$\sum_{n=k}^{l} (ca_n) = c\sum_{n=k}^{l} a_n; \qquad \sum_{n=k}^{l} (a_n + b_n) = \sum_{n=k}^{l} a_n + \sum_{n=k}^{l} b_n.$$

Silnia

Silnią liczby naturalnej $n \geqslant 2$ nazywamy iloczyn n kolejnych liczb naturalnych od 1 do n i oznaczmy go symbolem $n!$. Mamy zatem

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Dodatkowo przyjmujemy, że $1! = 1$ oraz $0! = 1$.
Uwaga. Silnia ma następującą interpretację kombinatoryczną. Liczba wszystkich ustawień (permutacji) liczb $1, 2, \ldots, n$ w ciąg n-elementowy jest równa $n!$. Dla dużych liczb naturalnych n prawdziwy jest następujący wzór przybliżony Stirlinga¶

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{gdzie } e \approx 2.72^{\|}.$$

¶James Stirling (1692-1770), matematyk szkocki.

‖Stała e jest granicą ciągu o wyrazach $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, gdy $n \to \infty$.

Przykład 1.23. Uprościć wyrażenia:

(a) $(n+1)! - n!$; (b) $\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!}$; (c) $\dfrac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2}$; (d) $\dfrac{(2n)!}{[2(n+1)]!}$.

Rozwiązanie. Mamy:

(a) $(n+1)! - n! = n! \cdot (n+1) - n! = n! \cdot (n+1-1) = n \cdot n!$;

(b) $\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!} = \dfrac{\cancel{(n+3)!}\,(n+4)(n+5)}{\cancel{(n+3)!}} = (n+4)(n+5)$;

(c) $\dfrac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2} = \dfrac{[n!\,(n+1)]^2}{(n!)^2} = \dfrac{\cancel{(n!)^2}\,(n+1)^2}{\cancel{(n!)^2}} = (n+1)^2$;

(d) $\dfrac{(2n)!}{[2(n+1)]!} = \dfrac{(2n)!}{(2n+2)!} = \dfrac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!} \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} = \dfrac{1}{(2n+1) \cdot (2n+2)}$.

Symbol Newtona

Niech liczby całkowite n i k będą nieujemne oraz niech spełniają warunek $k \leqslant n$. *Symbolem Newtona*** nazywamy liczbę określoną wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Można pokazać, że symbol Newtona jest liczbą naturalną. Z określenia tego symbolu wynika, że

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n.$$

Ponadto, zachodzą następujące wzory:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Uwaga. Symbol Newtona ma następującą interpretację kombinatoryczną. Liczba wszystkich k-elementowych podzbiorów (kombinacji) zbioru n-elementowego, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$, jest równa $\binom{n}{k}$.

Przykład 1.24. Obliczyć:

(a) $\dbinom{7}{3}$; (b) $\dbinom{13}{9}$; (c) $\dbinom{100}{98}$.

Rozwiązanie. Mamy:

(a) $\dbinom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!\,4!} = \dfrac{\cancel{4!} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3!\,\cancel{4!}} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$;

**Isaac Newton (1642–1727), matematyk, fizyk i astronom angielski.

(b) $\displaystyle\binom{13}{9} = \frac{13!}{9!\,(13-9)!} = \frac{13!}{9!\;4!} = \frac{\cancel{9!}\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{\cancel{9!}\;4!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 715;$

(c) $\displaystyle\binom{100}{98} = \frac{100!}{98!\,(100-98)!} = \frac{100!}{98!\;2!} = \frac{\cancel{98!}\cdot 99\cdot 100}{\cancel{98!}\;2!} = \frac{99\cdot 100}{1\cdot 2} = 4950.$

Dwumian Newtona

Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi, a n nieujemną liczbą całkowitą. Wyznaczymy rozwiniętą postać wyrażenia $(a+b)^n$ dla kilku początkowych wartości n. Mamy

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1,\\
(a+b)^1 &= a+b,\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.
\end{aligned}$$

Zapiszmy współczynniki przy wyrażeniach $a^k b^l$ w formie „trójkąta". Wówczas otrzymamy fragment konfiguracji liczb naturalnych zwanej *trójkątem Pascala*††
.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Zauważmy, że w tym trójkącie lewy i prawy bok składa się z „jedynek". Ponadto, suma dwóch sąsiednich liczb jest równa wyrazowi stojącemu na środku pod nimi (taką samą własność ma symbol Newtona). Obserwacje te pozwalają na wysunięcie hipotezy o ogólnej postaci rozwinięcia:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Dowód hipotezy można przeprowadzić za pomocą indukcji matematycznej. Powyższą równość nazywamy *wzorem dwumianowym Newtona*. Używając symbolu sumy wzór dwumianowy możemy zapisać krócej:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

††Blaise Pascal (1623–1662), matematyk, fizyk i filozof francuski.

Podajemy najczęściej stosowane rozwinięcia dwumianowe Newtona:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2,\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.\end{aligned}$$

Przykład 1.25. Zastosować wzór dwumianowy Newtona do wyrażeń:

(a) $(x-y)^5$; (b) $(\alpha+2)^8$; (c) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4$; (d) $(u+\sqrt{v})^6$.

Rozwiązanie.

(a) Podstawiając we wzorze Newtona $a=x$, $b=-y$ dla $n=5$, otrzymamy

$$\begin{aligned}(x-y)^5 &= [x+(-y)]^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{5-k}(-y)^k = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{5}{k}x^{5-k}y^k\\ &= \binom{5}{0}x^5y^0 - \binom{5}{1}x^4y^1 + \binom{5}{2}x^3y^2 - \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}x^1y^4 - \binom{5}{5}x^0y^5\\ &= x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5.\end{aligned}$$

(b) We wzorze Newtona podstawiamy $a=\alpha$ i $b=2$. Wtedy dla $n=8$ mamy

$$\begin{aligned}(\alpha+2)^8 &= \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\alpha^{8-k}2^k = \binom{8}{0}\alpha^8 2^0 + \binom{8}{1}\alpha^7 2^1 + \binom{8}{2}\alpha^6 2^2 + \binom{8}{3}\alpha^5 2^3\\ &\qquad +\binom{8}{4}\alpha 4 2^4 + \binom{8}{5}\alpha^3 2^5 + \binom{8}{6}\alpha^2 2^6 + \binom{8}{7}\alpha^1 2^7 + \binom{8}{8}\alpha^0 2^8\\ &= \alpha^8+16\alpha 7+112\alpha^6+448\alpha^5+1120\alpha^4+1792\alpha^3+1792\alpha^2+1024\alpha+256.\end{aligned}$$

(c) W tym przykładzie przyjmujemy $a=x^2$, $b=\frac{1}{x}$ oraz $n=4$. Wtedy

$$\begin{aligned}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\left(x^2\right)^{4-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{8-2k}x^{-k} = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{8-3k}\\ &= \binom{4}{0}x^8+\binom{4}{1}x^5+\binom{4}{2}x^2+\binom{4}{3}x^{-1}+\binom{4}{4}x^{-4}\\ &= x^8+4x^5+6x^2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^4}.\end{aligned}$$

(d) W kolejnym przykładzie podstawiamy $a=u$, $b=\sqrt{v}$ oraz $n=6$. Mamy

$$\begin{aligned}\left(u+\sqrt{v}\right)^6 &= \sum_{k=0}^{6}u^{6-k}\left(\sqrt{v}\right)^k = \binom{6}{0}u^6\left(\sqrt{v}\right)^0+\binom{6}{1}u^5\left(\sqrt{v}\right)^1+\binom{6}{2}u^4\left(\sqrt{v}\right)^2\\ &\qquad +\binom{6}{3}u^3\left(\sqrt{v}\right)^3+\binom{6}{4}u^2\left(\sqrt{v}\right)^4+\binom{6}{5}u^1\left(\sqrt{v}\right)^5+\binom{6}{6}u^0\left(\sqrt{v}\right)^6 =\end{aligned}$$

$$= u^6 + 6u^5\sqrt{v} + 15u^4v + 20u^3v\sqrt{v} + 15u^2v^2 + 6uv^2\sqrt{v} + v^3.$$

Przykład 1.26. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona obliczyć sumy:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$; (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$.

Rozwiązanie.
(a) Zastosujemy wzór dwumianowy do wyrażenia $(1+1)^n$. Wtedy otrzymamy

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

(b) Stosując wzór dwumianowy do wyrażenia $(1+2)^n$ otrzymamy

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k.$$

Przykład 1.27. W rozwinięciu dwumianowym wyrażenia:
(a) $\left(a^3 + \dfrac{1}{a^2}\right)^{15}$ znaleźć współczynnik stojący przy a^5;
(b) $\left(\sqrt[4]{x^5} - \dfrac{3}{x^3}\right)^{7}$ znaleźć współczynnik stojący przy $\sqrt[4]{x}$.

Rozwiązanie.
(a) Składniki w rozwinięciu dwumianowym wyrażenia $\left(a^3 + \left(1/a^2\right)\right)^{15}$ mają postać:

$$\binom{15}{k}\left(a^3\right)^{15-k}\left(\frac{1}{a^2}\right)^k = \binom{15}{k}a^{45-3k}a^{-2k} = \binom{15}{k}a^{45-5k}, \quad \text{gdzie } 0 \leqslant k \leqslant 15.$$

Zatem, aby otrzymać a^5 musi być spełnione równanie $45 - 5k = 5$. Stąd otrzymamy $k = 8$. Współczynnik przy a^5 jest równy $\binom{15}{8} = 6435$.

(b) Składniki w rozwinięciu dwumianowym wyrażenia $\left(\sqrt[4]{x^5} - \left(3/x^3\right)\right)^7$ mają postać:

$$\binom{7}{k}\left(\sqrt[4]{x^5}\right)^{7-k}\left(-\frac{3}{x^3}\right)^k = \binom{7}{k}(-3)^k\, x^{\frac{35-17k}{4}}.$$

Zatem, aby otrzymać $\sqrt[4]{x}$ musi być spełnione równanie $(35 - 17k)/4 = 1/4$. Stąd otrzymamy $k = 2$. Współczynnik przy $\sqrt[4]{x}$ jest równy $\binom{7}{2}(-3)^2 = 189$.

1.8. Ciągi arytmetyczne i geometryczne

Podstawowe określenia

Ciągiem nazywamy dowolną funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy n-tym wyrazem ciągu i oznaczmy np. przez a_n. Ciąg oznaczamy wówczas symbolem (a_n). Poniżej kilka przykładów ciągów:

$$a_n = n^2 + 1, \quad b_n = \frac{n}{n+4}, \quad x_n = 3^n, \quad y_n = \sqrt[2n]{1000}, \quad z_n = \sin\frac{n\pi}{3}.$$

Rozważa się także ciągi określone na zbiorach postaci $\{k, k+1, k+2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$, np.

$$a_n = \frac{1}{n-5}\ (n \geqslant 6),\ b_n = \sqrt{n-3}\ (n \geqslant 3),\ c_n = (n-7)!\ (n \geqslant 7).$$

Mówimy, że ciąg (a_n) jest *rosnący (malejący)*, jeżeli dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$a_{n+1} > a_n \qquad (a_{n+1} < a_n).$$

Np. ciągi $a_n = n+1$, $b_n = 2^n$ są rosnące, a ciągi $c_n = 1/n$, $d_n = -n^2$ – malejące. Podobnie, określa się ciąg *niemalejący* ($\geqslant$) oraz *nierosnący* ($\leqslant$).

Przykład 1.28. Uzasadnić, że ciąg:
(a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ jest rosnący; (b) $b_n = 2^{n+1} - 3^n$ jest malejący.

Rozwiązanie.
(a) Uzasadnimy, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} - a_n > 0$. Mamy

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.
(b) Pokażemy, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $b_{n+1} - b_n < 0$. Mamy

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \left(2^{n+2} - 3^{n+1}\right) - \left(2^{n+1} - 3^n\right) \\ &= 4 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n + 3^n = 2 \cdot (2^n - 3^n) < 0. \end{aligned}$$

Zatem ciąg (b_n) jest malejący.

Ciąg arytmetyczny

Ciąg (a_n) nazywamy *arytmetycznym*, jeżeli istnieje liczba rzeczywista r taka, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi warunek

$$a_{n+1} = a_n + r.$$

Liczbę r nazywamy *różnicą ciągu arytmetycznego*. Jeśli dany jest wyraz a_1 ciągu arytmetycznego oraz różnica r, to n-ty wyraz ciągu wyraża się wzorem

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Zauważmy, że gdy $r > 0$, to ciąg arytmetyczny jest rosnący, a gdy $r < 0$ – malejący. Sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, tj.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

można obliczyć ze wzoru

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Przykład 1.29.
(a) W ciągu arytmetycznym dane są $a_5 = 12$ oraz $a_9 = -8$. Wyznaczyć pierwszy wyraz oraz różnicę tego ciągu.

(b) W ciągu arytmetycznym suma początkowych pięciu wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 10, a suma dwunastu początkowych wyrazów o numerach parzystych wynosi 120. Obliczyć sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu.

(c) Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy $a_1 = 999$, a różnica wynosi $r = -13$. Obliczyć sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu.

(d) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznaczyć długości przyprostokątnych, jeżeli przeciwprostokątna ma długość 25.

Rozwiązanie.
(a) Niech a_1 będzie pierwszym wyrazem, a r różnicą tego ciągu. Korzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego $a_n = a_1 + (n-1)\,r$. Wtedy $a_5 = a_1 + 4r = 12$ oraz $a_9 = a_1 + 8r = -8$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} a_1 + 4r = 12, \\ a_1 + 8r = -8, \end{cases}$$

otrzymamy $a_1 = 32$ oraz $r = -5$.

(b) Niech (a_n) będzie szukanym ciągiem arytmetycznym i niech r oznacza jego różnicę. Z treści zadania wynikają następujące zależności:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + \ldots + a_9 = 10, \\ a_2 + a_4 + \ldots + a_{24} = 120. \end{cases}$$

Zauważmy, że zarówno wyrazy ciągu arytmetycznego o indeksach nieparzystych, jak i parzystych, nadal tworzą ciąg arytmetyczny (różnica tych ciągów jest równa $2r$). Dalej wykorzystamy wzór na sumę początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego. Mamy zatem

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 + a_9}{2} \cdot 5 = 10, \\ \dfrac{a_2 + a_{24}}{2} \cdot 12 = 120. \end{cases}$$

Teraz zastosujemy wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego $a_n = a_1 + (n-1)\,r$. Stąd mamy

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 + a_1 + 8r}{2} \cdot 5 = 10, \\ \dfrac{a_1 + r + a_1 + 23r}{2} \cdot 12 = 120 \end{cases}$$

i następnie

$$\begin{cases} a_1 + 4r = 2, \\ a_1 + 12r = 10. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są liczby $a_1 = -2, r = 1$. Teraz możemy obliczyć sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu. Mamy

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{-2 + (-2 + 9 \cdot 1)}{2} \cdot 10 = 25.$$

(c) Najpierw znajdziemy dodatnie wyrazy ciągu, a następnie wyznaczymy ich sumę. Zbadamy zatem, dla jakich n zachodzi nierówność $a_n > 0$. Korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymamy

$$a_n > 0 \Longleftrightarrow 999 + (n-1) \cdot (-13) > 0 \Longleftrightarrow n < \frac{1012}{13} \approx 77.846,$$

czyli $1 \leqslant n \leqslant 77$. Przechodzimy do obliczenia sumy dodatnich wyrazów ciągu. Korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego otrzymamy

$$S_{77} = \frac{a_1 + a_{77}}{2} \cdot 77 = \frac{999 + (999 + 76 \cdot (-13))}{2} \cdot 77 = 38\,885.$$

(d) Niech a, b, gdzie $0 < a < b$, oznaczają długości przyprostokątnych, a c długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego. Wtedy z twierdzenia Pitagorasa wynika zależność $a^2 + b^2 = c^2$. Kolejna zależność wynika z faktu, że skoro liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny, to różnice między kolejnymi wyrazami są takie same $b - a = c - b$. Po podstawieniu $c = 25$ otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 625, \\ 2b - a = 25. \end{cases}$$

Układ ten ma dwa rozwiązania $a = 15$, $b = 20$ oraz $a = -25$, $b = 0$. Drugie rozwiązanie odrzucamy, bo długości boków trójkąta są liczbami dodatnimi. Przyprostokątne trójkąta mają długość 15 i 20.

Ciąg geometryczny

Ciąg (a_n) nazywamy *geometrycznym*, jeżeli istnieje liczba rzeczywista q taka, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi warunek

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Liczbę q nazywamy *ilorazem ciągu geometrycznego*. Jeśli dany jest wyraz a_1 ciągu geometrycznego oraz iloraz q, to n-ty wyraz ciągu wyraża się wzorem

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Zauważmy, że gdy $q > 1$, to ciąg geometryczny o dodatnim wyrazie a_1 jest rosnący, a gdy $0 < q < 1$ – malejący. Odwrotnie jest, gdy wyraz a_1 jest ujemny.

Gdy $q \neq 1$, to sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, tj.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

można obliczyć ze wzoru

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Gdy $q = 1$, to oczywiście $S_n = na_1$.

Rozważmy teraz sumę nieskończenie wielu wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Sumę tę rozumiemy jako granicę ciągu (S_n), gdy $n \to \infty$, i nazywamy sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Można pokazać, że suma ta jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek $|q| < 1$. Przy tym założeniu mamy

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Przykład 1.30.
(a) W ciągu geometrycznym mamy $b_4 = 96$, $b_9 = -2$. Wyznaczyć b_{20}.

(b) W ciągu geometrycznym pierwszym wyrazem jest $a_1 = 3$, a ilorazem $q = 2$. Ile wyrazów tego ciągu spełnia nierówność $48 \leqslant a_n \leqslant 3072$?

(c) Zbadać, dla jakich wartości parametru x istnieje suma nieskończonego ciągu geometrycznego $1 + \left(x^2 - 2x\right) + \left(x^2 - 2x\right)^2 + \left(x^2 - 2x\right)^3 + \ldots$

(d) Suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego jest równa -2, a suma kwadratów tych wyrazów wynosi 3. Znaleźć sumę wartości bezwzględnych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie.

(a) Korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego $b_n = b_1 q^{n-1}$, otrzymamy $b_4 = b_1 q^3 = 96$, $b_9 = b_1 q^8 = -3$. Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} b_1 q^3 = 96, \\ b_1 q^8 = -3 \end{cases}$$

są liczby $b_1 = -768$, $q = -1/2$. Zatem $b_{20} = b_1 q^{19} = -768 \cdot (-1/2)^{19} = 3/2048$.

(b) Niech (a_n) będzie rozważanym ciągiem geometrycznym i niech q oznacza jego iloraz. Korzystając ze wzoru ma n-ty wyraz ciągu geometrycznego warunki zadania możemy zapisać w postaci

$$48 \leqslant 3 \cdot 2^{n-1} \leqslant 3072.$$

Stąd

$$2^4 \leqslant 2^{n-1} \leqslant 2^{10}.$$

Zatem $5 \leqslant n \leqslant 11$. Warunek podany z zadaniu spełnia 7 wyrazów ciągu.

(c) Warunkiem istnienia skończonej sumy nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie q jest $|q| < 1$. Dla ciągu rozważanego w przykładzie nierówność ta przyjmuje postać

$$\left|x^2 - 2x\right| < 1.$$

Nierówność ta jest równoważna koniunkcji nierówności

$$-1 < x^2 - 2x \quad \text{oraz} \quad x^2 - 2x < 1.$$

Częścią wspólną rozwiązań tych nierówności jest suma $\left(-\sqrt{2}+1, 1\right) \cup \left(1, \sqrt{2}+1\right)$.

(d) Zauważmy najpierw, że skoro (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to ciąg o wyrazach $b_n = (a_n)^2$ także jest ciągiem geometrycznym (o ilorazie q^2). Korzystając ze wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego, warunki podane w zadaniu możemy zapisać w postaci układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} = -2, \text{ gdzie } |q| < 1, \\ \dfrac{(a_1)^2}{1-q^2} = 3, \text{ gdzie } \left|q^2\right| < 1. \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy a_1 i wstawiamy do drugiego. Wówczas otrzymamy

$$\frac{4(1-q)^2}{1-q^2} = 3.$$

Rozwiązaniem tego równania, które spełnia warunek $|q| < 1$, jest $q = 1/7$. Stąd $a_1 = -12/7$. Przechodzimy do wyznaczenia sumy wartości bezwzględnych wyrazów tego szeregu. Łatwo zauważyć, że ciąg o wyrazach $c_n = |a_n|$ jest ciągiem geometrycznym (o ilorazie $|q|$). Zatem, stosując ponownie wzór na sumę nieskończonego szeregu geometrycznego, otrzymamy

$$S_\infty = \frac{|a_1|}{1-|q|} = \frac{\left|-\dfrac{12}{7}\right|}{1-\dfrac{1}{7}} = 2.$$

Zadania i odpowiedzi

Zadania

1.1. Czy podane sformułowania są zdaniami w logice? Jeśli są, to podać ich wartość logiczną:

(a) „Gniezno było stolicą Polski”; (b) „Liczba $10^{1000}+1$ jest podzielna przez 3”;

(c) „$a^2 + b^2 = c^2$”; (d) „Piotr nie jest moim bratem”;

(e) „W 2014 r. zadania maturalne z matematyki były trudne”;

(f) „Czy jadłeś dzisiaj obiad?”; (g) „$\Delta = b^2 - 4ac$”.

1.2. Ocenić prawdziwość zdań:

(a) „nieprawda, że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$”;

(b) „$(-1)^{44} = -1$ lub 2020 jest liczbą parzystą”;

(c) „funkcja $g(x) = \sin x$ jest okresowa, a funkcja $f(x) = 3^x$ nieparzysta”;

(d) „jeżeli Piotr jest synem Tadeusza, to Tadeusz jest ojcem Piotra”;

(e) „liczba 123456789 jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ jest podzielna przez 9” .

1.3. Zdanie „jestem studentem” oznaczmy literą p, zdanie „lubię matematykę” literą q, z kolei zdanie „mam siostrę” literą r. Używając podanych oznaczeń i spójników logicznych zapisać zdania:

(a) „Jestem studentem i mam siostrę”;

(b) „Jeżeli jestem studentem lub mam siostrę, to nie lubię matematyki”;

(c) „To, że mam siostrę wynika z tego, że lubię matematykę”;

(d) „Lubię matematykę, a więc jestem studentem lub mam siostrę”;

(e) „Jeżeli mam siostrę, to lubię matematykę”;

(f) „Fakt, że jestem studentem jest równoważny temu, że lubię matematykę.

1.4. Zbadać, czy podane formuły rachunku zdań są prawami logicznymi:

(a) $\sim (p \vee q) \Rightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$; (b) $p \Rightarrow [(q \wedge \sim q) \Rightarrow r]$;

(c) $(p \Rightarrow q) \iff [(\sim p) \vee q]$; (d) $[p \wedge (\sim q)] \vee [(\sim p) \wedge q]$.

1.5. Zbiory określone za pomocą funkcji zdaniowej zapisać w prostszej postaci:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \leqslant 4\}$; (b) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ jest liczbą parzystą}\}$;

(c) $\left\{k \in \mathbb{Z} : \dfrac{1}{k^2} \geqslant \dfrac{1}{4}\right\}$; (d) $\left\{\dfrac{1}{p} : p \text{ jest liczbą pierwszą}\right\}$;

(e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 - 2x = 0\right\}$; (f) $\{d \in \mathbb{Z} : d \text{ jest dzielnikiem liczby } 15\}$.

1.6. Podane stwierdzenia zapisać za pomocą kwantyfikatorów i funkcji zdaniowych:

(a) każda liczba rzeczywista jest dodatnia;

(b) równanie $\sqrt{x} = 1$ ma rozwiązanie rzeczywiste;

(c) zbiór liczb naturalnych nie jest ograniczony z góry;

(d) zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma element największy;

(e) w zbiorze $B \subset \mathbb{R}$ nie ma elementu najmniejszego;

(f) każda liczba rzeczywista jest parzysta;

(g) równanie $x^2 + x + 1 = 0$ nie ma rozwiązania rzeczywistego;

(h) równanie $x^5 + x = 3$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste.

1.7. Zbadać, czy podane funkcje zdaniowe z kwantyfikatorami są prawdziwe:

(a) $\bigvee\limits_{x\in\mathbb{R}} \sin x = \frac{1}{2}$; (b) $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} x^2 + 4x + 3 > 0$; (c) $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} \bigvee\limits_{y\in\mathbb{R}} x^2 - y^2 = 0$;

(d) $\bigvee\limits_{y\in\mathbb{R}} \bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} xy = 0$; (e) $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} |x^n| = |x|^n$; (f) $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigvee\limits_{x,y,z\in\mathbb{R}} x^n + y^n = z^n$.

1.8. Uprościć wyrażenia:

(a) $\dfrac{a^4-1}{1-a}$; (b) $\dfrac{x^3-8}{x^3-6x^2+12x-8}$; (c) $\dfrac{4x^4-81}{\sqrt{2}x-3}$; (d) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{x-1}$.

1.9. Podane wyrażenia uwolnić od niewymierności w mianowniku:

(a) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}}$; (b) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+2}$; (c) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$; (d) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{2}-1}$.

1.10. Uprościć wyrażenia:

(a) $\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{x^2-1}$ $(-1 < x < 1)$; (b) $\dfrac{\sqrt[4]{(x-1)^8}}{(1-x)^2}$ $(x \neq 1)$; (c) $\dfrac{\sqrt{-x^5}}{x^3}$ $(x < 0)$.

1.11. Podane wyrażenia zapisać bez symbolu wartości bezwzględnej:

(a) $|x-3|$; (b) $|8-2x|$; (c) $||x|+2|$; (d) $|1-|x||$;

(e) $2x + |2-x| - |x+1|$, jeżeli $x \leqslant -1$; (f) $\left|\dfrac{x(x+1)}{x-2}\right|$, jeżeli $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

1.12. Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej rozwiązać nierówności:

(a) $|x-5| > 2$; (b) $|x+1| \leqslant 3$; (c) $|2-3x| < 1$.

1.13. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą równości:

(a) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

(b) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

(c) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(d) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

1.14. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba:

(a) $n^3 - n$ jest podzielna przez 6; (b) $13^n + 11$ jest podzielna przez 12;

(c) $5^n - 1$ jest podzielna przez 4; (d) $9^n + 3$ jest podzielna przez 4.

1.15. (a) Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi nierówność
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$
(b) Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 5$ zachodzi nierówność
$$2^n > n^2.$$
(c) Pokazać, że dla dowolnych liczb nieujemnych x, y oraz dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\frac{x^n + y^n}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

1.16. Uzasadnić, że ciąg:

(a) $a_n = 2n - n^2$ jest malejący; (b) $b_n = n + \dfrac{1}{n}$ jest rosnący.

1.17. Podane sumy zapisać bez symbolu $\sum$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} \frac{n}{n+2}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{5} \sqrt[n]{2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{5} (2n-1)^3$.

1.18. Zastosować wzór dwumianowy Newtona do wyrażeń:

(a) $(2x+y)^4$; (b) $(c-1)^7$; (c) $\left(x + \dfrac{1}{x^3}\right)^5$; (d) $(\sqrt{u} + \sqrt[4]{v})^8$.

1.19. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona obliczyć sumy:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$; (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1.20. W rozwinięciu dwumianowym wyrażenia:

(a) $\left(x^5 - \dfrac{2}{x^3}\right)^{12}$ znaleźć współczynnik przy x^{20};

(b) $\left(3\sqrt[4]{a^3} + \sqrt{a}\right)^{18}$ znaleźć współczynnik przy a^{12}.

1.21. (a) W ciągu arytmetycznym pierwszym wyrazem jest $a_1 = \dfrac{1}{2}$, a różnicą $r = \dfrac{3}{2}$. Którym wyrazem ciągu jest 23?

(b) Obliczyć sumę $2 + 5 + 8 + \ldots + 1001$, w której składniki są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

(c) Kąty w trójkącie tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym najmniejszy kąt jest cztery razy mniejszy od największego. Znaleźć te kąty.

1.22. (a) Pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego jest $a_1 = 2$, a ilorazem $q = 3$. Jaką najmniejszą liczbę kolejnych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby ich suma była większa od 2000?

(b) Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym. Znamy wartości sum $S_2 = 36$ oraz $S_3 = 42$. Wyznaczyć S_4.

(c) Liczby $5, x, y, 10$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Znaleźć x, y.

(d) Rozwiązać równanie

$$\frac{x}{1+x} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots = 4 - 3x,$$

w którym lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

1.23. (a) Liczby $a, 15, c$ tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby a, 9, c ciąg geometryczny. Znaleźć a i c.

(b) Długości boków w trójkącie prostokątnym tworzą ciąg geometryczny. Znaleźć sinusy kątów ostrych tego trójkąta.

Odpowiedzi

1.1. (a) prawda; (b) fałsz; sformułowania (c), (d), (e), (f), (g) nie są zdaniami.

1.2. (a) Zdanie jest prawdziwe, bo zdanie „funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$” jest fałszywe. Mamy bowiem $f(-1) = 1 > f(0) = 0$. A to jest sprzeczne z określeniem funkcji rosnącej. (b) Zdanie jest prawdziwe, bowiem drugie zdanie alternatywy jest prawdziwe. (c) Z kolei to zdanie jest fałszywe, bo drugie zdanie koniunkcji jest fałszywe. (W języku potocznym odpowiednikiem spójnika logicznego „i” jest „a”). Mamy bowiem $f(-1) = \dfrac{1}{3} \neq -f(1) = -3$.

(d) Oczywiste jest, że zdanie jest prawdziwe. (e) Mimo błędnego sformułowania cechy podzielności przez 9, ostatnie zdanie jest prawdziwe. Łatwo to sprawdzić bezpośrednio.

1.3. (a) $p \wedge r$; (b) $(p \vee r) \Rightarrow\ \sim q$; (c) $q \Rightarrow r$; (d) $q \Rightarrow (p \vee r)$; (e) $r \Rightarrow q$; (f) $p \Longleftrightarrow q$.

1.4. (a), (c) tak; (b), (d) nie.

1.5. (a) $[-1, 7]$; (b) $\{2, 4, 6, \ldots\}$; (c) $\{-2, -1, 1, 2\}$; (d) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots\right\}$;

(e) $\{0,\ -1,\ 2\}$; (f) $\{-1, 1, -3, 3, -5, 5, -15, 15\}$.

1.6. (a) $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} x > 0$; (b) $\bigvee\limits_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{x} = 1$; (c) $\bigwedge\limits_{M\in\mathbb{R}} \bigvee\limits_{n_0\in\mathbb{N}} n_0 \geqslant M$; (d) $\bigvee\limits_{a_0\in A} \bigwedge\limits_{a\in A} a \leqslant a_0$;

(e) $\bigwedge\limits_{b\in B} \bigvee\limits_{b_0\in B} b_0 < b$; (f) $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} x = 2n$; (g) $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} x^2 + x + 1 \neq 0$;

(h) $\bigvee\limits_{x\in\mathbb{R}} x^5 + x = 3\ \wedge\ \bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge\limits_{y\in\mathbb{R}} \left[(x^5 + x = 3) \wedge (y^5 + y = 3)\right] \Longleftrightarrow x = y$.

1.7. (a) Zdanie jest prawdziwe, bo np. dla $x = \frac{\pi}{6}$ mamy $\sin x = \frac{1}{2}$. (b) Zdanie jest fałszywe, bo np. dla $x = -2$ mamy $x^2 + 4x + 3 < 0$. (c) Zdanie jest prawdziwe, bo dla wybranego $x \in \mathbb{R}$ można przyjąć $y = x$. (d) Zdanie jest prawdziwe. Wystarczy przyjąć $y = 0$. (e) Zdanie jest prawdziwe. (f) Zdanie jest prawdziwe. Wystarczy przyjąć $n = 1$ oraz $x = y = 1$, $z = 2$.

1.8. (a) $-(a+1)\left(a^2+1\right)$; (b) $\dfrac{x^2+2x+4}{(x-2)^2}$; (c) $\left(2x^2+9\right)\left(\sqrt{2}x+3\right)$; (d) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$.

1.9. (a) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{3}$; (b) $4\left(\sqrt{5}-2\right)$; (c) $2\sqrt{6}-\sqrt{14}+\sqrt{21}-4$; (d) $5\left(1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}\right)$.

1.10. (a) $-\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; (b) 1; (c) $-\dfrac{1}{\sqrt{-x}}$.

1.11. (a) $\begin{cases} x-3, \text{ gdy } x \geqslant 3, \\ 3-x, \text{ gdy } x < 3; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x-8, \text{ gdy } x \geqslant 4, \\ 8-2x, \text{ gdy } x < 4; \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+2, \text{ gdy } x \geqslant 0, \\ 2-x, \text{ gdy } x < 0; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -x-1, \text{ gdy } x \leqslant -1, \\ x+1, \text{ gdy } -1 < x \leqslant 0, \\ 1-x, \text{ gdy } 0 < x \leqslant 1, \\ x-1, \text{ gdy } x > 1; \end{cases}$ (e) $2x+3$; (f) $\dfrac{x(x+1)}{x-2}$.

1.12. (a) $x < 3$ lub $x > 7$; (b) $-4 \leqslant x \leqslant 2$; (c) $\frac{1}{3} < x < 1$.

1.16. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności:
(a) $a_{n+1} - a_n < 0$; (b) $b_{n+1} - b_n > 0$.

1.17. (a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{6}+\frac{5}{7}+\frac{6}{8}$; (b) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[5]{2}$; (c) $3^3+5^3+7^3+9^3$.

1.18. (a) $(2x+y)^4 = 16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4$; (b) $(c-1)^7 = c^7-7c^6+21c^5-35c^4+35c^3-21c^2+7c-1$; (c) $\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^5 = x^5+5x+\dfrac{10}{x^3}+\dfrac{10}{x^7}+\dfrac{5}{x^{11}}+\dfrac{1}{x^{15}}$;
(d) $$(\sqrt{u}+\sqrt[4]{v})^8 = u^4+8\sqrt{u^7}\sqrt[4]{v}+28u^3\sqrt{v}$$
$$+56\sqrt{u^5}\sqrt[4]{v^3}+70u^2v+56\sqrt{u^3}\sqrt[4]{v^5}+28u\sqrt{v^3}+8\sqrt{u}\sqrt[4]{v^7}+v^2.$$

1.19. (a) 0; (b) 4^n.

1.20. (a) $-\binom{12}{5}\cdot 2^5$; (b) $\binom{18}{6}\cdot 3^{12}$.

1.21. (a) szesnastym; (b) $\dfrac{2+1001}{2}\cdot 334 = 167\,501$; (c) $\alpha = 24^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 96^\circ$.

1.22. (a) siedem; (b) $S_4 = 45$; (c) $x = 5\sqrt[3]{2}, y = 5\sqrt[3]{4}$; (d) $x = 1$.

1.23. (a) $a = 3, c = 27$; (b) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\sin\beta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.