Markowe Wykłady z Matematyki

Markowe
Wykłady
z **M**atematyki

wstęp do matematyki

Marek Zakrzewski

Projekt okładki
Andrzej Krupa

Skład komputerowy książki w systemie LaTeX wykonał autor.
Rysunki wykonał Marian Gewert.

ISBN 978–83–67234–26–9

Wydanie I, Wrocław 2025
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS Bierońscy, Sp. kom.

Wyznaję pogląd naiwny, ale logicznie bez zarzutu, że (. . .) są tylko dwie kategorie studentów: tacy, którzy już lubią matematykę oraz tacy, którzy jeszcze jej nie lubią, ale mogą polubić. Moja książka adresowana jest do obu tych grup.

George F. Simmons, *Calculus gems*, MAA 2007

Mojej Nauczycielce
Profesor Oldze Stande

Spis treści

Przedmowa

> *Teoria mnogości to wspaniała dziedzina, i nie ma innej gałęzi matematyki, która dostarczałaby tak żywych przykładów potęgi analizy logicznej.*
>
> Bertrand Russell, *Wprowadzenie do filozofii matematyki*

Książka może służyć jako podstawowy podręcznik dla semestralnego kursu Wstęp do matematyki dla studentów matematyki I roku. Początkowe 16 wykładów pokrywa się z typowym programem takiego kursu, dwa ostatnie wprowadzają w tematykę teorii obliczeń i wyjaśniają znaczenie twierdzenia Gödla.

Dwa aspekty przedmiotu

Wstęp do matematyki pełni w wykształceniu matematyka rolę dwojaką. Z jednej strony zajmuje się przygotowaniem narzędzi logicznych i matematycznych. Mieszczą się w tym elementy logiki, działania na zbiorach, język funkcji i relacji. Z drugiej strony kurs ma wprowadzić studentów w fascynujący świat teorii mnogości. Uczenie się narzędzi rzadko kiedy jest pasjonujące, ale mam nadzieję, że przynajmniej część zadań okaże się dostatecznie inspirująca, by także tę pierwszą część kursu uczynić ciekawą. Jednak prawdziwa matematyka zaczyna się w części III, poświęconej teorii mnogości.

Jak w poprzednich tomach *Markowych wykładów z matematyki* staram się być dość ścisły, ale szczególny nacisk kładę na motywacje i zastosowanie wprowadzanych pojęć.

Rola zadań i poziom trudności

Książka zawiera ponad 200 zadań. Na Wstępie do matematyki praktycznie nie ma zadań rachunkowych. Najprostsze kontrolują rozumienie pojęć, ale większość ma na celu pokazanie zastosowań wprowadzanych pojęć w innych działach matematyki. Niemal wszystkim towarzyszą pełne rozwiązania albo obszerne wskazówki. Zadania po symbolu ♢♢♢ wzbogacają rozumienie przed-

miotu, ale nie mają istotnego wpływu na lekturę dalszych wykładów. Trudniejsze zadania oznaczone są gwiazdką, w kilku przypadkach dwiema.

Biogramy i historia

Podobnie, jak we wcześniejszych tomach serii książka zawiera krótkie notki biograficzne matematyków występujących w głównym tekście. Długość notki nie jest proporcjonalna do nieformalnej rangi uczonego. Wprost przeciwnie, wolałem poświęcić więcej miejsca postaciom mniej znanym.

Nowością jest *Rzut oka na historię matematyki* na końcu książki. To sporo mniej niż osobny tom poświęcony historii matematyki — o czym często myślałem — ale może dzięki jego zwięzłości (35 str.) znajdzie więcej czytelników. Pewna orientacja w historii uprawianej dyscypliny jest na pewno pożądana i stanowi istotny składnik kultury matematycznej. Indeks odnoszący się do tej części obejmuje wyłącznie nazwiska.

♢ ♢ ♢

Z teorią mnogości — najważniejszą częścią kursu — zetknąłem się mając lat 15 dzięki książce Wojciecha Bieńki *Zygzakiem przez matematykę* (książka zawiera też ładne wyjaśnienie, co to jest teoria względności). Fascynacja tą tematyką pozostała ze mną na zawsze. Już kilka lat później jako student I roku wtajemniczałem w odkrycia Cantora licealistów z mojej szkoły, wykładałem ją znajomym fizykom podczas górskich wycieczek, a w okresie 1982-2019 prowadziłem wykłady ze wstępu do matematyki prawie 20 razy. Tematyki tej dotyczył także mój doktorat.

Trudno mi dziś wskazać tytuły książek i osoby, które mogły ostatecznie wpłynąć na kształt niniejszej książki. Ograniczę się do wpływów z ostatnich lat. Przynajmniej kilka ciekawych zadań pochodzi z list dr. hab. Szymona Żeberskiego, z których często korzystałem. Moi studenci — tu mogę wymienić w szczególności (obecnie doktorów) Dariusza Kosza, Mariusza Olszewskiego i Pawła Plewę, z którymi miałem wyjątkowo dużo zajęć — często znajdowali eleganckie, nie znane mi, rozwiązania zadań. Wszystkim wymienionym tu osobom gorąco dziękuję.

Tradycyjnie dziękuję również moim Kolegom-Wydawcom Marianowi Gewertowi — zwłaszcza za przygotowanie rysunków i troskę o wygląd graficzny książki — oraz Zbyszkowi Skoczylasowi za inicjatywę wydania tej książki i liczne sugestie redakcyjne.

Wrocław, wrzesień 2025 Marek Zakrzewski

III

Nieskończoność

Nie damy się wygnać z raju stworzonego przez Cantora.

David Hilbert podczas wystąpienia
na Międzynarodowym Kongresie Matematyków
Bolonia 1928

Matematyka jest nauką o nieskończoności. Stwierdzenie, że każda liczba parzysta od 4 do 1 000 000 jest sumą dwu liczb pierwszych, choć prawdziwe, jest zupełnie nieciekawe. To samo w odniesieniu do wszystkich liczb parzystych większych od 2 jest treścią hipotezy, która fascynuje matematyków od niemal 300 lat. Matematyk rzadko interesuje się twierdzeniami, których dowód sprowadza się do rozpatrzenia skończonej liczby przypadków czy też podania prostego przykładu.

W naukach innych niż matematyka uczony wiele odkrywa w wyniku wnikliwej obserwacji i przemyślanych eksperymentów. Logika — zazwyczaj mniej formalna niż w matematyce — pełni funkcję pomocniczą. Matematyk może dzięki obserwacji i odważnym uogólnieniom sformułować *hipotezę*. Ale gdy przystępuje do *dowodu* skazany jest wyłącznie na swoją, zawsze ograniczoną, wiedzę i logikę. Tylko w matematyce logika odgrywa tak zasadniczą rolę.

Nieskończoność była w matematyce obecna niemal od zawsze, ale przedmiotem uważnego, osobnego zainteresowania stała się dopiero w II połowie XIX w., gdy Cantor stworzył teorię mnogości. Dzięki odkryciom Cantora nieskończoność, a dokładniej teoria zbiorów nieskończonych, stała się osobnym przedmiotem badań matematycznych.

Ale wraz z nieskończonością pojawiły się niepokojące problemy, logiczne paradoksy i antynomie (wewnętrzne sprzeczności). Pojawiły się też spory, co do pewnych fundamentalnych elementów teorii mnogości: jedni matematycy akceptowali tzw. pewnik wyboru, inni go odrzucali. W tej sytuacji część matematyków proponowała ograniczyć się w badaniach nad nieskończonością, a nawet odrzucić podstawową zasadę logiki: prawo wyłączonego środka. Na szczęście stanowili oni mniejszość. Zdecydowana większość matematyków nie zamierzała rozstać się z fascynującym światem, jaki stworzył Cantor.

Wykład 11

Przeliczalność

Zbiory dzielą się na skończone i nieskończone. Do lat siedemdziesiątych XIX w. pojęcie nieskończoności nie było przedmiotem głębszej analizy ze strony matematyków, ale wydaje się, że podświadomie zakładali oni, że jest tylko jedno piętro nieskończoności: wszystkie nieskończoności są takie same. W roku 1873 Georg Cantor wykazał, że jest inaczej; tych pięter jest nieskończenie wiele, a najniższe z nich tworzą zbiory przeliczalne.

11.1 Zbiory przeliczalne i zbiory nieprzeliczalne

Zbiory przeliczalne i przeliczalność zbioru liczb wymiernych - Nieprzeliczalność zbioru liczb rzeczywistych - Zadania

Z pozoru liczb wymiernych jest dużo więcej niż liczb naturalnych. Jednakże Cantor wykazał, że jest ich tyle samo. Dopiero liczb rzeczywistych jest więcej. Odkrycie to zapoczątkowało rozwój nowej gałęzi matematyki: teorii mnogości.

Zbiory przeliczalne i przeliczalność zbioru liczb wymiernych

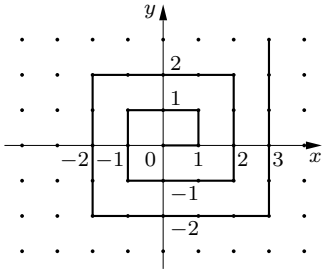
Spójrzmy na poniższe przyporządkowanie:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots \end{array}$$

Widzimy, że pomiędzy liczbami naturalnymi a całkowitymi istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość: różnym liczbom naturalnym odpowiadają różne liczby całkowite, przy czym każda liczba całkowita ma swój numer. Innymi słowy, elementy tego zbioru można ustawić w ciąg.

Jeżeli elementy zbioru A można ustawić w ciąg nieskończony (być może z powtórzeniami), to mówimy, że A jest zbiorem **przeliczalnym**. W szczególności, zbiorami przeliczalnymi są zbiory skończone, zapewnia to uwaga w nawiasie. Oczywiście podzbiór zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym.

Pokazaliśmy, że zbiór liczb całkowitych jest zbiorem przeliczalnym. Okazuje się, iż także zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny. Poniższy rysunek pokazuje, jak poruszając się po nieskończonej łamanej możemy obejść kolejno punkty kratowe płaszczyzny $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(-1,1)$, ...



Jeżeli w punkcie (p,q), gdzie $q \neq 0$, umieścimy liczbę p/q, to otrzymamy ponumerowanie wszystkich liczb wymiernych. Jednak niektóre punkty odpowiadają ułamkom wcześniejszym, np. punkty $(4,2)$ i $(2,1)$ odpowiadają temu samemu ułamkowi. Gdy pominiemy punkty odpowiadające takim powtórzeniom otrzymamy następującą numerację liczb wymiernych:

$$0,\ \frac{1}{1}=1,\ \frac{1}{-1}=-1,\ \frac{2}{-1}=-2,\ \frac{2}{1}=2,\ \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2}=-\frac{1}{2},\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2},\ -3,\ 3,\ldots$$

Działania na zbiorach przeliczalnych

Rozważmy przeliczalną rodzinę zbiorów przeliczalnych:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{03}, \ldots\},\\ A_1 &= \{a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\},\\ A_2 &= \{a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\},\\ A_3 &= \{a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\},\\ &\vdots \end{aligned}$$

Wówczas

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \{a_{00},\quad a_{01}, a_{10},\quad a_{02}, a_{11}, a_{20},\quad a_{03}, a_{12}, a_{21}, a_{30},\ \ldots\}$$

Kolejne grupy składają się z wyrazów a_{ij} o ustalonej sumie indeksów: najpierw suma indeksów zero, potem jeden, dwa, trzy itd.

Tak więc suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym. W szczególności, odnosi się to do sumy skończenie wielu zbiorów przeliczalnych.

W podobny sposób dowodzi się, że produkt kartezjański dwu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym (p. zad. 2). Korzystając z zasady indukcji matematycznej wnioskujemy stąd, że produkt skończenie wielu zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.

Nieprzeliczalność zbioru liczb rzeczywistych i metoda przekątniowa

Poniższe twierdzenie jest bez wątpienia najważniejszym odkryciem Cantora i najważniejszym twierdzeniem tej części.

TWIERDZENIE 11.1.1 (Cantora, 1874)
Zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.

DOWÓD: W istocie pokażemy, że nieprzeliczalny jest już mniejszy zbiór: przedział $[0,1)$. Przypuśćmy, że zbiór liczb rzeczywistych tego przedziału można ponumerować liczbami naturalnymi, $[0,1) = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Spójrzmy na tę numerację:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, \underline{a_{00}}\ a_{01}\ a_{02}\ a_{03}\ldots\\
a_1 &= 0, a_{10}\ \underline{a_{11}}\ a_{12}\ a_{13}\ldots\\
a_2 &= 0, a_{20}\ a_{21}\ \underline{a_{22}}\ a_{23}\ldots\\
a_3 &= 0, a_{30}\ a_{31}\ a_{32}\ \underline{a_{33}}\ldots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Przyjmujemy umowę, że jeżeli liczba ma zapis niejednoznaczny, np. $0,1000\ldots = 0,0999\ldots$, to wybieramy zapis niezawierający „ogona" dziewiątek. Przy takim zastrzeżeniu rozwinięcie dziesiętne liczby jest jednoznaczne.

Rozważmy liczbę $b = 0, b_0 b_1 b_2 b_3 \ldots$, gdzie

$$b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1, & \text{gdy } a_{ii} \leqslant 7,\\ a_{ii} - 1, & \text{gdy } a_{ii} \geqslant 8. \end{cases}$$

Oczywiście $b \in [0,1)$, ale b jest różna od wszystkich liczb a_n. Przypuśćmy bowiem, że $b = a_n$. Wówczas $b_n = a_{nn}$, więc

$$a_{nn} \pm 1 = a_{nn},$$

co jest niemożliwe.

Zakładaliśmy, że ciąg a_n zawiera wszystkie liczby przedziału $[0,1)$, okazało się, że nie zawiera b. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. Łatwo stąd wywnioskować, iż także każdy inny przedział jest nieprzeliczalny.

Zastosowana tu technika znana jest jako **metoda przekątniowa**, nazwa pochodzi od przekątnej jaką tworzą podkreślone cyfry a_{nn}. Cantor odkrył ją dopiero kilkanaście lat po odkryciu nieprzeliczalności $\mathbb{R}$. Pierwszy dowód był znacznie bardziej skomplikowany.

Suma dwu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym. Wynika stąd, iż także liczb niewymiernych jest nieprzeliczalnie wiele, w przeciwnym razie $\mathbb{R}$ byłby zbiorem przeliczalnym. Zatem większość liczb rzeczywistych to liczby niewymierne.

Inne podejście: dowód topologiczny

Przedstawiony wyżej dowód nieprzeliczalności $\mathbb{R}$ traci na elegancji z powodu niejednoznaczności zapisu dziesiętnego. Wady tej nie ma dowód odwołujący się do pewnej zasadniczej własności zbioru $\mathbb{R}$ wyrażonej w lemacie, znanej z elementarnego wykładu topologii. Czytelnik, który z topologią się nie zetknął może ten dowód nazwać „geometrycznym".

Lemat 11.1.1 (Cantora)
Część wspólna zstępującego ciągu ograniczonych domkniętych przedziałów prostej jest niepusta.

Przejdźmy zatem do dowodu nieprzeliczalności zbioru $\mathbb{R}$. Znów pokażemy wynik mocniejszy: nieprzeliczalność przedziału $[0,1]$. Przypuśćmy, że $[0,1] = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Skonstruujemy ciąg przedziałów domkniętych

$$[0,1] \supset A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

takich, że $a_n \notin A_n$. Na mocy lematu Cantora część wspólna tych zbiorów zawiera pewną liczbę $b \in [0,1]$, oczywiście różną od wszystkich a_n. Sprzeczność.

Zbiory A_n konstruujemy w sposób następujący. Podzielmy przedział $[0,1]$ na trzy przedziały domknięte $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$ oraz $[2/3,1]$. Przynajmniej jeden z nich nie zawiera a_0, nazwijmy go A_0.

Podobnie dzielimy A_0 na trzy przedziały domknięte, przynajmniej jeden nie zawiera a_1, nazwijmy go A_1. W analogiczny sposób konstruujemy kolejne zbiory: A_{n+1} to któryś z trzech przedziałów A_n nie zawierający a_{n+1}.

Zadania

1. Zapisz wzorem algebraicznym bijekcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ za pomocą:
a) oczywistego wzoru definiowanego przez przypadki (z użyciem nawiasu klamrowego);
b)* pojedynczego wzoru.

2. Wykaż, że produkt dwu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

3. Wykaż, że płaszczyzny nie można pokryć przeliczalnym zbiorem prostych.

4. Uzasadnij, że skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ jest przeliczalnie wiele.

5. Czy w dowodzie topologicznym można opisany podział zastąpić podziałem:
a) na dwa przedziały domknięte;
b) na trzy przedziały rozłączne;
c) na trzy przedziały domknięte różnej długości, o rozłącznych wnętrzach?

$$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$$

6. Wykaż, że po usunięciu z płaszczyzny przeliczalnie wielu punktów płaszczyzna nie rozpadnie się. Dokładniej: każde dwa punkty tej „dziurawej płaszczyzny" można połączyć łamaną lub łukiem w niej zawartym

7. Każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci iloczynu liczby nieparzystej i pewnej potęgi dwójki.
a) Wykorzystując tę wskazówkę skonstruuj bijekcję $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
b)** Wykaż, że funkcja

$$f(m,n) = \binom{m+n+1}{2} + m$$

też określa bijekcję pomiędzy obu zbiorami.

11.2 Pierwsze zastosowania

Liczby algebraiczne i liczby przestępne - Dowód istnienia liczb przestępnych - Zadania

Odkrycie, że nie wszystkie nieskończności są takie same jest interesujące i ważne samo przez się, ale już pierwsza praca Cantora poświęcona tej tematyce pokazała jej znaczenie dla innych działów matematyki. Cantor wykazał w niej, że większość liczb rzeczywistych to liczby przestępne.

Liczby algebraiczne i liczby przestępne

Liczbę będącą pierwiastkiem niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych nazywamy **algebraiczną**. Wszystkie liczby wymierne, a także $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, są przykładami liczb algebraicznych. Liczby nie będące algebraicznymi nazywamy **przestępnymi**.

Już pod koniec XVIII w. przypuszczano, że takie liczby istnieją. Pierwszy przykład podał w roku 1844 Joseph Liouville, ale była to liczba sztucznie w tym celu skonstruowana. W roku 1873 Charles Hermite wykazał, że liczbą przestępną jest podstawa logarytmu naturalnego e, w roku 1882 Ferdinand Lindemann wykazał przestępność π. Każdy znany dowód tych faktów jest dość trudny. Jednak nietrudno wykazać, że liczby przestępne istnieją. Nawet więcej: większość liczb rzeczywistych to liczby przestępne.

Dowód istnienia liczb przestępnych

Niezerowemu wielomianowi $w(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych przyporządkujmy jego rangę

$$|a_n| + \ldots + |a_1| + |a_0| + n.$$

Na przykład wielomiany stałe 1 oraz -1 mają rangę 1, wielomiany x, $-x$, 2 oraz -2 rangę 2, a wielomiany

$$x^2,\ -x^2,\ 2x,\ -2x,\ x+1,\ x-1,\ -x+1,\ -x-1,\ 3,\ -3$$

rangę 3. Nietrudno zauważyć, że wielomianów o współczynnikach całkowitych ustalonej rangi jest skończenie wiele. Niech A_n oznacza zbiór pierwiastków wszystkich wielomianów rangi n. Każdy z tych zbiorów jest skończony, gdyż niezerowy wielomian ma skończenie wiele pierwiastków.

Zbiór liczb algebraicznych to

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

Pozostaje zauważyć, że przeliczalna suma zbiorów skończonych jest zbiorem przeliczalnym. Istotnie, ustawiając w ciąg kolejne elementy zbiorów A_1, A_2, A_3, ... wyznaczamy pewną numerację wszystkich elementów ich sumy.

Zadania

8. Wykaż, że każda z podanych liczb jest algebraiczna:

a) $1+\sqrt{2}$; b) $1+\sqrt[3]{2}$; c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

9. Wykaż, że jeśli a jest liczbą algebraiczna, to jest nią też: a) $-a$; b) $1/a$.

♢ ♢ ♢

10. Twierdzenie Gelfonda-Schneidera głosi, że jeżeli a, b są liczbami algebraicznymi różnymi od 0 oraz 1, przy czym b jest niewymierną, to liczba a^b jest przestępna. Wykaż, ze istnieje liczba niewymierna a taka, że a^a też jest niewymierna:
a) korzystając z twierdzenia Gelfonda-Schneidera; b) nie korzystając z tego twierdzenia.

11. Wiedząc, że e oraz π są liczbami przestępnymi wykaż, iż przynajmniej jedna z liczb $e+\pi$ oraz $e\pi$ jest niewymierna. Przypuszcza się, że obie są niewymierne.

11.3 Cantor

Georg Cantor (1845-1918), urodził się i pierwsze lata życia spędził w Sankt-Petersburgu, jako syn zamożnego kupca. Rodzina matki miała bogate tradycje muzyczne, w dorosłym wieku Cantor nieraz wspominał z żalem, że ojciec nie pozwolił mu zostać skrzypkiem. Średnie wykształcenie zdobywał najpierw w gimnazjum w Wiesbaden, potem zaś w szkole realnej w Darmstadcie. W roku 1862 podejmuje studia na uniwersytecie z Zurychu, rok później, po śmierci ojca, przenosi się do Berlina. Tam słucha wykładów Weierstrassa, Kummera i Kroneckera. W roku 1867 uzyskuje stopień doktora za pracę z teorii liczb. Od roku 1872 aż do śmierci profesor uniwersytetu w Halle. Starania o profesurę w Berlinie były konsekwentnie blokowane przez Kroneckera, który nie rozumiał znaczenia prac Cantora. Cantor był matematykiem bardzo aktywnym społecznie. Współtworzył i był pierwszym przewodniczącym Stowarzyszenia Matematyków Niemieckich (1890-93). Od połowy lat osiemdziesiątych zaczyna popadać w głęboką depresję. Zmarł w klinice psychiatrycznej.

Do historii matematyki przeszedł głównie jako twórca teorii mnogości. Dwa podstawowe jego odkrycia to nieprzeliczalność $\mathbb{R}$ i dowód równoliczności prostej z płaszczyzną. Ten ostatni wynik wpłynął istotnie na rozwój topologii i powstanie teorii wymiaru. Cantor jest też autorem jednej z dwu podstawowych formalizacji liczb rzeczywistych.

Wykład 12

Liczby kardynalne i twierdzenie Cantora

Odkrycie przez Cantora, że istnieją zbiory nieprzeliczalne doprowadziło do pojęcia liczby kardynalnej. Z twierdzenia Cantora wynika, że nieskończonych liczb kardynalnych jest nieskończenie wiele.

12.1 Liczby kardynalne

Równoliczność i liczby kardynalne - Jak bardzo nieciągła może być funkcja monotoniczna? - Zadania

Liczby naturalne służą do liczenia (jeden, dwa, trzy, ...), do porządkowania (pierwszy, drugi, trzeci, ...), a także — raczej przypadkowo — do mierzenia; np. odległość może wynieść 100 metrów. Jest to rola dość przypadkowa, gdyż przy mierzeniu pojawiają się one jako zaokrąglenia liczb rzeczywistych.

W latach siedemdziesiątych XIX w. Georg Cantor odkrył, że można rozszerzyć pojęcie liczby naturalnej tak, aby nowe liczby określały liczebność zbiorów nieskończonych.

Równoliczność i liczby kardynalne

Mówimy, że zbiory A oraz B są **równoliczne**, jeżeli istnieje bijekcja

$$f : A \to B.$$

Liczebność — inaczej **moc** — zbioru skończonego wyraża się liczbą naturalną. Moc zbioru pustego to 0, moc zbioru jednoelementowego to 1, itd. **Liczby**

kardynalne to moce zbiorów dowolnych. Są nimi zatem liczby 0, 1, 2, 3, ..., ale także moce zbiorów nieskończonych, np.

$$\text{moc } \mathbb{N} = \aleph_0 \text{ (czyt. alef zero)}, \qquad \text{moc } \mathbb{R} = \mathfrak{c} \text{ (czyt. kontinuum)}.$$

Moc zbioru X będziemy oznaczać symbolem $\#X$. Odnotujmy proste, ale użyteczne twierdzenie.

TWIERDZENIE 12.1.1 *Moc zbioru nieskończonego nie zmienia się, gdy do niego dodamy lub z niego odrzucimy jeden element.*

DOWÓD: Niech X będzie zbiorem nieskończonym, $a \notin X$. Pokażemy, że zbiory X oraz $X \cup \{a\}$ są równoliczne. W tym celu wybierzmy jakikolwiek przeliczalny zbiór $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ zawarty w X. Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a_0, & \text{gdy } x = a, \\ a_{n+1}, & \text{gdy } x = a_n, \\ x, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

definiuje bijekcję zbioru $X \cup \{a\}$ na X. Skoro mocy zbioru nie zmienia dodanie elementu, to nie zmienia go też odrzucenie elementu. To samo odnosi się do dodania bądź odrzucenia skończonego zbioru.

Liczby kardynalne można porównywać. Mówimy, że

$$\#A \leqslant \#B,$$

jeżeli istnieje funkcja różnowartościowa $f : A \to B$. Relacja $\leqslant$ zachowuje się, jak zwykła nierówność.

Oczywiście $\#A \leqslant \#A$, żądaną injekcją jest identyczność.

Relacja ta jest też przechodnia. Istotnie, niech $\#X \leqslant \#Y$ oraz $\#Y \leqslant \#Z$. Oznacza to, że istnieją injekcje

$$f : X \to Y \qquad \text{oraz} \qquad g : Y \to Z.$$

Wówczas $g \circ f : X \to Z$ jest żądaną injekcją X w Z, więc $\#X \leqslant \#Z$.

W następnym wykładzie wykażemy, że relacja $\leqslant$ na zbiorze liczb kardynalnych jest też słabo antysymetryczna. Naturalnie ostra nierówność $\#A < \#B$ oznacza, że $\#A \leqslant \#B$, ale $\#A \neq \#B$. W szczególności

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}.$$

Jak bardzo nieciągła może być funkcja monotoniczna?

Klasyczna funkcja Dirichleta (w punktach wymiernych 0, w niewymiernych 1) jest przykładem funkcji wszędzie nieciągłej. Pokażemy, że taka osobliwość nie jest możliwa w przypadku funkcji monotonicznych. Dokładniej, funkcja monotoniczna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma co najwyżej przeliczalnie wiele punktów nieciągłości.

Zauważmy przede wszystkim, że dla funkcji monotonicznej f i dowolnego punkru a istnieją obie granice jednostronne:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to a^+} f(x),$$

oznaczmy je odpowiednio A^- oraz A^+. Jeżeli a jest punktem nieciągłości, to obie te granice są różne.

Dla ustalenia uwagi załóżmy, że funkcja jest niemalejąca. Tak więc każdemu punktowi nieciągłości a odpowiada niepusty przedział (A^-, A^+). Zauważmy, że przedziały odpowiadające różnym punktom nieciągłości są rozłączne. Istotnie, jeżeli $a < b$, to ze względu na monotoniczność funkcji f mamy $A^+ < B^-$.

Pozostaje zauważyć, że dowolna rodzina parami rozłącznych przedziałów prostej jest przeliczalna. Rzeczywiście, wybierając z każdego spośród tych przedziałów liczbę wymierną otrzymujemy injekcję tej rodziny w przeliczalny zbiór $\mathbb{Q}$.

Henri Lebesgue wykazał, że funkcja monotoniczna jest prawie wszędzie (terminu precyzować nie będziemy) różniczkowalna. Dowód jest dużo trudniejszy.

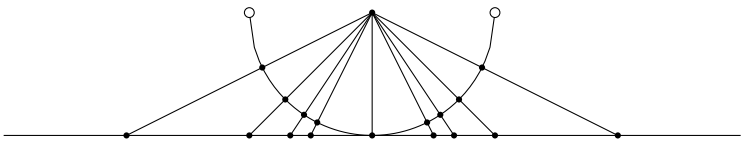
Zadania

1. Wykaż, że następujące pary zbiorów są równoliczne:
a) $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}_+$; b) $(0, 2\pi)$ i $\mathbb{R}$; c) $[1, 3]$ i $[3, 7]$; d) $(-1, 1)$ oraz $\mathbb{R}$.

2. Podaj przykład bijekcji przedziału (a, b): a) na przedział otwarty $(0, 1)$; b) na $\mathbb{R}$.

3. Znajdź bijekcję pomiędzy górną otwartą półpłaszczyzną $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ a całą płaszczyzną $\mathbb{R}^2$.

4. Rysunek pokazuje geometryczne uzasadnienie równoliczności otwartego półokręgu i prostej. Pokaż w podobny sposób równoliczność prostej i okręgu z odrzuconym punktem.



5. Wykaż, że gdy ze zbioru nieprzeliczalnego usuniemy przeliczalnie wiele elementów, to jego moc nie zmieni się.

♢ ♢ ♢

6. Wykaż, że dowolna funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma co najwyżej przeliczalnie wiele ekstremów właściwych.

7.* Wykaż, że rodzina nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ zawiera:
a) łańcuch mocy $\mathfrak{c}$;
b) rodzinę mocy $\mathfrak{c}$ zbiorów parami prawie rozłącznych, tzn. takich, że ich część wspólna jest skończona.

8.** Wykaż, że płaszczyzny nie można pokryć zbiorem parami rozłącznych egzemplarzy litery $\top$, nawet jeżeli dopuszczamy różne ich wielkości.

12.2 Twierdzenie Cantora i paradoksy logiczne

Hipoteza continuum - Twierdzenie Cantora - Paradoks kłamcy - Dwa paradoksy lingwistyczne - Zadania

Dotychczas w naszych rozważaniach pojawiły się tylko dwie nieskończone liczby kardynalne: $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$. Spróbujemy teraz odpowiedzieć na dwa pokrewne pytania: czy jest jakaś liczba kardynalna pomiędzy nimi i czy są liczby kardynalne większe od $\mathfrak{c}$.

Hipoteza continuum

Od samego początku nasuwało się pytanie, czy istnieje liczba kardynalna pomiędzy $\aleph_0$ a $\mathfrak{c}$. Hipoteza, że takich liczb nie ma znana jest jako **hipoteza continuum**. Ale dopiero w roku 1963 Paul Joseph Cohen wykazał, że jest ona niezależna od powszechnie stosowanej aksjomatyki teorii mnogości. Oznacza to, że nie da się rozstrzygnąć, czy jest ona prawdziwa czy fałszywa na bazie intuicji, jakie wiążemy z pojęciem *zbiór*.

W dziedzinach bliskich teorii mnogości czasem zakłada się prawdziwość hipotezy continuum (rzadziej jej negacji) i bada jej konsekwencje. W takich przypadkach zaznacza się, że wynik został uzyskany przy tym dodatkowym założeniu.

Twierdzenie Cantora

Odpowiedź na drugie z pytań jest prostsza. Oprócz liczb $\aleph_0$ oraz $\mathfrak{c}$ istnieje nieskończenie wiele innych nieskończonych liczb kardynalnych. Wynika to bezpośrednio z poniższego:

Twierdzenie 12.2.1 (Cantora)
Dla dowolnego zbioru X zachodzi nierówność

$$\#X < \#P(X).$$

Dowód: Oczywiście $\#X \leqslant \#P(X)$, gdyż przyporządkowanie $x \to \{x\}$ jest funkcją różnowartościową przekształcającą zbiór X w $P(X)$.

Wystarczy zatem wykazać, że żadna funkcja $f : X \to P(X)$ nie przekształca X na cały zbiór $P(X)$. W tym celu rozważmy podzbiór

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

Przypuśćmy, że zbiór A jest wartością funkcji f. Niech $A = f(a)$ dla pewnego $a \in X$. Wówczas

$$a \in A \longleftrightarrow a \notin f(a) \longleftrightarrow a \notin A.$$

Zatem a należy do A wtedy i tylko wtedy, gdy a nie należy do A. Sprzeczność.

Teza, iż dla dowolnego zbioru X pomiędzy mocą X a mocą $P(X)$ nie ma żadnej liczby kardynalnej nosi miano **uogólnionej hipotezy continuum**. Także ona jest niezależna od powszechnie przyjętych aksjomatów.

Paradoks kłamcy

Podstawowa idea dowodu twierdzenia Cantora nawiązuje do chyba najsłynniejszego paradoksu logicznego: paradoksu kłamcy. Podobne rozumowanie doprowadziło do odkrycia, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

Paradoks kłamcy został odkryty w Grecji w IV w. p. n. e. przez Eubulidesa Spójrzmy na jego współczesną wersję:

To zdanie jest fałszywe.

Jeżeli przyjmiemy, że jest prawdziwe, oznacza to, że jest tak, jak ono twierdzi: jest fałszywe. Ale jeżeli przyjmiemy, że jest fałszywe, oznacza to, że nie jest fałszywe, więc jest prawdziwe.

Widzimy zatem, że choć z pozoru jest to normalne zdanie oznajmujące, nie możemy mu przypisać żadnej wartości logicznej.

Podobny charakter ma **paradoks Russella**, znany też jako **paradoks golibrody**. Przypuśćmy, że w pewnym pułku jeden z żołnierzy zostaje golibrodą, przy czym obowiązuje go następująca zasada: ma obowiązek golić wszystkich

tych i tylko tych, którzy się sami nie golą. Zastanów się, czy powinien siebie golić, czy nie.

Paradoksy logiczne od zawsze interesowały filozofów. Od lat 70. XIX w. zaczęły interesować też matematyków. Widzieliśmy już, jak rozumowanie bliskie paradoksu kłamcy wykorzystał Cantor. Na początku XX w. podobnie rozumując poniższy nieoczekiwany wynik uzyskał Bertrand Russell.

Twierdzenie 12.2.2 *Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.*

Dowód: Zauważmy, że pewne zbiory są swoimi elementami, np. zbiór pojęć abstrakcyjnych jest pojęciem abstrakcyjnym, więc jest swoim elementem. Nazwijmy takie zbiory **anormalnymi**.

Załóżmy, że zbiór wszystkich zbiorów U istnieje. Istnieje wówczas także zbiór A złożony z wszystkich zbiorów normalnych:

$$A = \{X \in U : X \notin X\}.$$

Ale zauważmy, że

$$A \in A \longleftrightarrow A \notin A.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Praktyczną konsekwencją tego twierdzenia jest wymóg pewnej staranności w formułowaniu myśli. Matematyk nie może rozważać zbioru wszystkich zbiorów i wielu innych „zbiorów". W wykładzie 15. zobaczymy, jak matematycy radzą sobie z tymi trudnościami.

Dwa paradoksy lingwistyczne

Inny charakter mają paradoksy związane z językiem. Rozważymy dwa: Grellinga i Berry'ego.

Paradoks Grellinga-Nelsona dotyczy pewnej kategorii przymiotników. Przymiotnik nazywamy autologicznym, jeżeli ma określaną przez niego własność, np. *polski* czy *sześciosylabowy*. Pozostałe przymiotniki nazywamy heterologicznymi. Czy słowo *heterologiczny* jest autologiczne czy heterologiczne?

Nietrudno zauważyć, że jeżeli byłby autologiczny, to byłby heterologiczny. Ale gdyby był heterologiczny, byłby autologiczny. Nie da się go poprawnie zakwalifikować.

Paradoks Berry'ego ilustruje pewne trudności związane z pojęciem *definiowalności*.

Zdefiniujmy początkowe liczby naturalne:
0 — rozwiązanie równania $x + x = x$;
1 — różne od zera rozwiązanie równania $ax = a$;
2 — $1 + 1$;
...
Oczywiście zdań, które zawierają co najwyżej 100 znaków (przyjmujemy ustaloną klawiaturę) jest skończenie wiele. Rozważmy zatem „najmniejszą liczbę naturalną, której nie da się zdefiniować za pomocą mniej niż 100 znaków." Czy liczba ta ma taką krótką definicję czy nie?

Zadania

9. Czy istnieje zbiór o mocy większej niż moc $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$, $P(P(\mathbb{N}), \ldots$?

10. Korzystając z uogólnionej hipotezy continuum udowodnij, że jeśli zbiory $P(A)$ oraz $P(B)$ są równoliczne, to także A oraz B są równoliczne.

11. Czy w paradoksie Grellinga-Nelsona przymiotnik *autologiczny* jest autologiczny, czy heterologiczny?

12. W czasie kampanii wyborczej panowie Alfa, Beta i Gamma złożyli następujące oświadczenia:
Alfa: *Beta zawsze kłamie.*
Beta: *Gamma zawsze kłamie.*
Gamma: *Alfa zawsze kłamie.*
Uzasadnij, że przynajmniej dwa z tych oświadczeń są fałszywe.

13. W czasie kampanii wyborczej panowie Alfa, Beta, Gamma i Delta złożyli następujące oświadczenia:
Alfa: *Beta zawsze kłamie.*
Beta: *Gamma przynajmniej czasem mówi prawdę.*
Gamma: *Delta przynajmniej czasem kłamie.*
Delta: *Alfa zawsze mówi prawdę.*
Wykaż, że dokładnie dwa z tych zdań są prawdziwe.

Wykład 13

Twierdzenie Cantora-Bernsteina

Z poprzedniego wykładu wiemy, że relacja $\leqslant$ na liczbach kardynalnych jest zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna, ale dowód tej ostatniej własności pominęliśmy. Własność ta często jest wydzielana jako osobne twierdzenie — twierdzenie Cantora-Bernsteina — gdyż jej dowód jest wyraźnie trudniejszy niż dowód dwu pozostałych.[1]

13.1 Podstawowe zastosowania

Najprostsze zastosowanie - Moc zbioru $P(\mathbb{N})$ - Ile punktów ma płaszczyzna? - Zadania

Aby docenić rolę tego twierdzenia, pokażemy, jak za jego pomocą wyznaczyć moc kilku ważnych zbiorów. Dalsze zastosowania poznamy w następnym wykładzie.

Najprostsze zastosowanie

Dla wygody Czytelnika sformułujemy twierdzenie Cantora-Bernsteina w sposób jawny:

Twierdzenie 13.1.1 (Cantora-Bernsteina)
Dla dowolnych liczb kardynalnych $\#X$, $\#Y$, jeżeli $\#X \leqslant \#Y$ oraz $\#Y \leqslant \#X$, to $\#X = \#Y$.

[1] Pierwsze dowody opublikowali niezależnie Friedrich Schröder (1896) i Felix Bernstein (1897), ale nazwa twierdzenie Cantora-Bernsteina-Schrödera jest w Polsce rzadko stosowana.

Pokażemy, że każdy niejednopunktowy przedział prostej ma moc $\mathfrak{c}$. Oczywiście każdy taki przedział, jako podzbiór prostej, ma moc co najwyżej $\mathfrak{c}$. Pozostaje pokazać, że ma przynajmniej taką moc.

Przesuńmy przedział (moc zbioru przy przesunięciu nie zmienia się) tak, aby jego wnętrze pokryło się z przedziałem $(0, a)$. Funkcja cotangens jest bijekcją pomiędzy $(0, \pi)$ a zbiorem $\mathbb{R}$, więc

$$\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{a} : (0, a) \to \mathbb{R}$$

jest bijekcją pomiędzy wnętrzem przesuniętego przedziału a całą prostą. Zatem wnętrze to ma moc $\mathfrak{c}$. Przedział uzupełniony o jeden bądź dwa końce ma zatem moc przynajmniej $\mathfrak{c}$.

Zauważmy, że w przypadku przedziału otwartego możemy zawsze znaleźć jawny wzór definiujący bijekcję pomiędzy $\mathbb{R}$ a tym przedziałem, tylko dla przedziałów domkniętych i domknięto-otwartych korzystamy tu z twierdzenia Cantora-Bernsteina. Mogliśmy też skorzystać z twierdzenia 12.1.1. W dalszych zastosowaniach ominąć twierdzenie Cantora-Bernsteina jest dużo trudniej.

Moc zbioru $P(\mathbb{N})$

Kolejną ważną zależność wyodrębnimy jako osobne twierdzenie.

Twierdzenie 13.1.2 *Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru* $\mathbb{N}$ *ma moc* $\mathfrak{c}$.

Dowód: Przyporządkujmy każdemu podzbiorowi $A \subset \mathbb{N}$ jego funkcję charakterystyczną

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \in A; \\ 1, & \text{gdy } n \notin A, \end{cases}$$

czyli pewien ciąg nieskończony zerojedynkowy. Niech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ będzie ciągiem odpowiadającym zbiorowi A. Przyporządkowanie

$$A \to 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$$

definiuje injekcję $P(\mathbb{N})$ w odcinek $[0, 1]$. Zatem moc zbioru $P(\mathbb{N})$ jest równa co najwyżej $\mathfrak{c}$.

Oczywiście powyższe przekształcenie nie jest bijekcją. Musimy zatem jeszcze pokazać, że moc zbioru $P(\mathbb{N}$ jest równa przynajmniej $\mathfrak{c}$. W tym celu zdefiniujemy injekcję przedziału $[0, 1)$ w zbiór $P(\mathbb{N})$. Zapiszmy każdą z liczb tego przedziału w notacji dwójkowej. Aby uniknąć niejednoznaczności przyjmiemy

umowę, że nie dopuszczamy „ogonów" z samych jedynek. Przyporządkowując liczbie $0, a_0a_1a_2\ldots$ zbiór

$$A = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\}$$

otrzymujemy żądaną injekcję. Stąd, na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina, zachodzi żądana równość.

Z powyższego twierdzenia łatwo wywnioskować zależność ogólną: każdy nieskończony zbiór przeliczalny ma $\mathfrak{c}$ podzbiorów.

Ile punktów ma płaszczyzna?

Wykażemy teraz kolejny, raczej zaskakujący, wynik: zbiory punktów płaszczyzny i prostej są równoliczne. Oznacza to, że zbiór punktów płaszczyzny ma moc $\mathfrak{c}$.

Jest oczywiste, że zbiór punktów płaszczyzny ma moc przynajmniej $\mathfrak{c}$, gdyż zawiera prostą. Pozostaje wykazać, że zbiór ten ma moc co najwyżej $\mathfrak{c}$. Wiemy, że prosta jest równoliczna z przedziałem $(0, 1)$. Podobnie płaszczyzna jest równoliczna z kwadratem jednostkowym. Żądaną bijekcją jest

$$f(x, y) = (\mathrm{ctg}\pi x, \mathrm{ctg}\pi y)$$

przekształcająca kwadrat otwarty $(0, 1) \times (0, 1)$ na płaszczyznę $\mathbb{R}^2$. Skoro te dwa zbiory są równoliczne, to wystarczy pokazać injekcję kwadratu w prostą $\mathbb{R}$. Przykładem takiej injekcji jest przekształcenie

$$g(0, x_1x_2x_3\ldots, 0, y_1y_2y_3\ldots) = 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$$

W podobny sposób można wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n także $\mathbb{R}^n$ ma moc $\mathfrak{c}$. Inną metodę i mocniejszy wynik pokażemy w następnym wykładzie.

Zadania

1. Jaką moc ma rodzina nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$?

2. Wykaż równoliczność przedziałów $[0, 1]$ oraz $(0, 1)$ nie korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina. W tym celu zdefiniuj jakąkolwiek bijekcję pomiędzy nimi.

3. Jaką moc ma zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

4. Niech funkcja okreslona wzorem $f(a) = (f_x(a), f_y(a))$ będzie bijekcją $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^2$. Korzystając z funkcji f zdefiniuj bijekcję $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^3$.

13.2 Dowód twierdzenia Cantora-Bernsteina*

Konstrukcja bijekcji - Zadania

Symbol $\leqslant$ jest tak silnie kojarzony ze zwykłą nierównością, iż wydaje się, że nie ma tu czego dowodzić. Jednak rzecz jest mniej oczywista: na podstawie dwu injekcji $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to X$ musimy zbudować pewną bijekcję $h : X \to Y$.

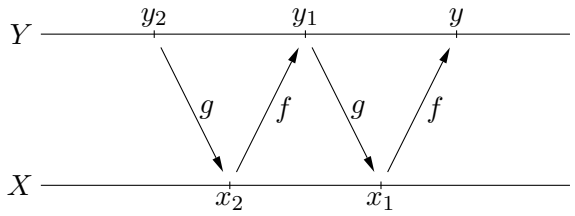
Konstrukcja bijekcji

Z założeń twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika, że istnieją injekcje

$$f : X \to Y \qquad \text{oraz} \qquad g : Y \to X.$$

Skonstruujemy bijekcję $h : X \to Y$. W tym celu dla ustalonego $y \in Y$ rozważmy ciąg

$$\begin{aligned} x_1 &= f^{-1}(y), \\ y_1 &= g^{-1}(f^{-1}(y)), \\ x_2 &= f^{-1}[g^{-1}(f^{-1}(y))], \\ y_2 &= g^{-1}\left(f^{-1}[g^{-1}(f^{-1}(y))]\right), \\ &\vdots \end{aligned}$$



Ponieważ funkcje f, g nie są zazwyczaj surjekcjami (gdyby były to nasze rozumowanie byłoby zbędne), więc przynajmniej dla niektórych y konstrukcja takiego ciągu gdzieś się kończy. Ostatni element nazwiemy *praprzodkiem* danego y. Na rysunku praprzodkiem y jest y_2.

Podzielmy elementy zbioru X na trzy klasy: A - praprzodek należy do X, B - praprzodek należy do Y, C - elementy nie mające praprzodka:

$$\begin{aligned} & & x_k \xrightarrow{f} y_k, \quad x_{k-1} \xrightarrow{f} y_{k-1}, \quad \dots \\ & & y_k \xrightarrow{g} x_k, \quad y_{k-1} \xrightarrow{g} x_{k-1}, \quad \dots \\ \dots \quad x_{k+1} \xrightarrow{f} y_{k+1}, & \quad x_k \xrightarrow{f} y_k & x_{k-1} \xrightarrow{f} y_{k-1}, \quad \dots \end{aligned}$$

Funkcja

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & \text{gdy praprzodek } t \in X, \\ g^{-1}(t), & \text{gdy praprzodek } t \in Y, \\ f(t), & \text{gdy } t \text{ nie ma praprzodka.} \end{cases}$$

jest żądaną bijekcją.

Istotnie, ponieważ zbiory A, B oraz C są parami rozłączne, więc funkcja h jest poprawnie określona i różnowartościowa. Niech $y \in Y$. Jeżeli praprzodek y należy do X albo y nie ma praprzodka, to $y = h(f^{-1}(y))$, jeżeli praprzodek y należy do X, to $y = h(g(y))$. Zatem funkcja h jest także surjekcją.

Funkcję f musieliśmy zmodyfikować, gdyż punkty należące do klasy B nie są jej wartościami. Zauważmy jeszcze, że w trzecim przypadku wartość szukanej bijekcji można określić dowolnie: jako $f(t)$ albo $g^{-1}(t)$.

Zadania

5. Jak uprościć dowód, gdy okaże się, iż żaden praprzodek nie należy do X?

6. Niech $f(x) = x/2$ będzie injekcją zbioru $[0, 1]$ w zbiór $[0, 1)$, $g(x) = x$ injekcją $[0, 1)$ w $[0, 1]$. Podaj jawny wzór na bijekcję h pomiędzy obu zbiorami, jaki otrzymamy stosując konstrukcję opisaną wyżej.

Wykład 14

Arytmetyka liczb kardynalnych

Liczby naturalne można dodawać, mnożyć i potęgować. Pokażemy, jak te trzy działania określić dla dowolnych liczb kardynalnych. W dalszej części poznamy ich zastosowania.

14.1 Dodawanie i mnożenie liczb kardynalnych

Dodawanie liczb kardynalnych - Mnożenie liczb kardynalnych - Rozdzielność mnożenia względem dodawania - Zadania

Działania na liczbach kardynalnych definiujemy tak, aby wprowadzone definicje dawały w przypadku liczb naturalnych oczekiwane wyniki.

Dodawanie liczb kardynalnych

Niech $\mathfrak{m}$ oraz $\mathfrak{n}$ będą liczbami kardynalnymi. Weźmy jakiekolwiek zbiory rozłączne X, Y takie, że $\mathfrak{m} = \#(X)$ oraz $\mathfrak{n} = \#(Y)$. Sumę liczb $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ definiujemy wzorem

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \#(X \cup Y).$$

Założenie rozłączności zbiorów X, Y jest konieczne, aby definicja dawała poprawny wynik dla skończonych liczb kardynalnych. Ponieważ operacja $\cup$ jest przemienna i łączna, więc także dodawanie liczb kardynalnych jest przemienne i łączne.

Nietrudno wykazać, że suma $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ nie zależy od wyboru zbiorów X, Y reprezentujących obie moce. To samo odnosi się do iloczynów i potęg liczb kardynalnych.

Wiemy, że

$$\#\{0,1,2,3\ldots\} = \#\{-1,-2,-3,\ldots\} = \#(\mathbb{Z}) = \aleph_0,$$

więc

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \#(\{0,1,2,3,\ldots\}) + \#\{\{-1,-2,-3,\ldots\} = \#(\mathbb{Z}) = \aleph_0.$$

Podobnie

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \#(\mathbb{R}_-) + \#(\mathbb{R}_+) = \#(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+) = \#\mathbb{R} = \mathfrak{c}.$$

Przedostatnia równość wynika stąd, że dodanie jednego elementu do zbioru nieskończonego nie zmienia jego mocy.

Wygląda na to, że dodając liczby kardynalne musimy starannie dobierać rozłączne zbiory odpowiadające danym liczbom kardynalnym. Na szczęście arytmetyka liczb kardynalnych w praktyce okaże się znacznie prostsza.

Mnożenie liczb kardynalnych

Iloczynem liczb kardynalnych $\mathfrak{m} = \#(X)$ oraz $\mathfrak{n} = \#(Y)$ nazywamy liczbę

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \#(X \times Y).$$

Także mnożenie liczb kardynalnych jest przemienne i łączne. Zachodzi też rozdzielność mnożenia względem dodawania. Dla dowodu przemienności zauważmy, że przekształcenie $f(x,y) = (y,x)$ jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów $X \times Y$ oraz $Y \times X$. Dowody dwu pozostałych własności są podobne.

Przypomnijmy, że produkt kartezjański zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny, a w poprzednim wykładzie pokazaliśmy, że płaszczyzna jest równoliczna z prostą. Zatem

$$\aleph_0\aleph_0 = \#(\mathbb{N}) \cdot \#(\mathbb{N}) = \#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \aleph_0$$

oraz

$$\mathfrak{c}\mathfrak{c} = \#(\mathbb{R}) \cdot \#(\mathbb{R}) = \#(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \#(\mathbb{R}^2) = \#\mathbb{R} = \mathfrak{c}.$$

Zachodzi zależność ogólna:

Twierdzenie 14.1.1 *Dla dowolnych nieskończonych liczb kardynalnych* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \max(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \qquad \textit{oraz} \qquad \mathfrak{m}\mathfrak{n} = \max(\mathfrak{m},\mathfrak{n}).$$

Dowód drugiej z tych równości jest trudny, pierwsza jest jej oczywistą konsekwencją. Rzeczywiście,

$$\max(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \leqslant \mathfrak{m} + \mathfrak{n} \leqslant 2\max(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \leqslant \mathfrak{m}\mathfrak{n} = \max(\mathfrak{m},\mathfrak{n}),$$

z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika, że wszystkie powyższe nierówności możemy zastąpić równościami, w szczególności $\max(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$.

Zadania

1. Uzasadnij, że dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ i dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\underbrace{\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}}_{n} = \mathfrak{m}.$$

2. Wykaż, że:
a) jeżeli $\mathfrak{n} + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, to $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{p}$;
b) jeżeli $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{p}$, to $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$.

3. Uzasadnij, że mnożenie liczb kardynalnych jest: a) łączne; b) rozdzielne względem dodawania.

4. Załóżmy, że $\mathfrak{n} < \mathfrak{p}$, przy czym $\mathfrak{p}$ jest nieskończoną liczbą kardynalną. Uzasadnij, że gdy ze zbioru mocy $\mathfrak{p}$ usuniemy $\mathfrak{n}$ elementów, to jego moc się nie zmieni.

5.* Wykaż, że każdy zbiór nieskończony można podzielić na dwa rozłączne zbiory tej samej mocy.

14.2 Potęgowanie liczb kardynalnych

Potęgowanie liczb kardynalnych i jego własności - Pominięte dowody - Zadania

Przypomnijmy, że wszystkich funkcji $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ jest 2^n. Uogólniając tę zależność otrzymamy definicję potęgi dla liczb kardynalnych.

Potęgowanie i jego własności

Przypomnijmy, że Y^X to zbiór wszystkich funkcji $f : X \to Y$. Niech $\mathfrak{p} = \#Y$, $\mathfrak{m} = \#X$ będą liczbami kardynalnymi. Potęgę $\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}$ określamy wzorem

$$\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}} = \#\left(Y^X\right).$$

Potęgowanie to zachowuje podstawowe własności potęgowania liczb naturalnych:

$$\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}\mathfrak{p}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}, \qquad \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{m}\mathfrak{n})^{\mathfrak{p}}, \qquad (\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}.$$

Dość rutynowe, ale wymagające staranności, dowody tych wzorów poprzedzimy dwoma kolejnymi twierdzeniami. W zastosowaniach arytmetyki liczb kardynalnych odgrywają one rolę kluczową.

Twierdzenie 14.2.1 *Zbiór mocy $\mathfrak{m}$ ma $2^{\mathfrak{m}}$ podzbiorów.*

Dowód: Niech X będzie zbiorem mocy $\mathfrak{m}$. Każdemu zbiorowi $A \subset X$ przyporządkujmy jego **funkcję charakterystyczną** $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ określoną warunkiem

$$\chi_A(x) = 1 \longleftrightarrow x \in A.$$

Przyporządkowanie $A \to \chi_A$ określa odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną pomiędzy rodziną $P(X)$ wszystkich podzbiorów X a zbiorem wszystkich funkcji $f : X \to \{0,1\}$. Istotnie, różnym podzbiorom odpowiadają różne funkcje, a każda funkcja $f : X \to \{0,1\}$ jest funkcją charakterystyczną pewnego podzbioru X. Konkretnie zbioru $A = \{x \in X : f(x) = 1\}$. Zatem

$$\#P(X) = \#\left(\{0,1\}^X\right) = 2^{\#(X)} = 2^{\mathfrak{m}}.$$

Dwie najczęściej występujące liczby kardynalne większe od $\aleph_0$ to $\mathfrak{c} = \#\mathbb{R}$ oraz $2^{\aleph_0} = \#P(\mathbb{N})$. Okazuje się, że są one równe.

TWIERDZENIE 14.2.2 *Zachodzi równość* $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

DOWÓD: Funkcja

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots) \to 0, a_0a_1a_2a_3\ldots$$

przyporządkowuje każdemu nieskończonemu ciągowi zerojedynkowemu (czyli funkcji $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$) liczbę rzeczywistą. Funkcja ta jest oczywiście różnowartościowa, więc

$$2^{\aleph_0} = \#\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right) \leqslant \#\mathbb{R} = \mathfrak{c}.$$

Na odwrót, przyporządkujmy liczbie rzeczywistej $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ z przedziału $[0,1)$ zapisanej w układzie dwójkowym ciąg $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Aby przyporządkowanie to było poprawnie określone, musimy po raz kolejny, przyjąć umowę, że nie dopuszczamy „ogonów" jedynek. Oczywiście przyporządkowanie to jest injekcją. Przypomnijmy, że dowolny przedział prostej ma moc continuum. Zatem

$$\mathfrak{c} = \#[0,1) \leqslant \#\left(\{0,1\}^{\mathfrak{N}}\right) = 2^{\aleph_0}.$$

Na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina zachodzi żądana równość.

Możemy teraz dać dużo krótsze uzasadnienie równoliczności płaszczyzny z prostą:

$$\#(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Pominięte dowody

Przy pierwszej lekturze warto pewnie te dowody pominąć. Nie są one głębokie, ale przy braku doświadczenia z podobnymi dowodami mogą sprawiać trudność.

Zacznijmy od równości $\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}\mathfrak{p}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}$. Niech $\mathfrak{m} = \#(X)$, $\mathfrak{n} = \#(Y)$, $\mathfrak{p} = \#(Z)$, przy czym zbiory X, Y są rozłączne. Lewa strona to moc zbioru $Z^{X \cup Y}$, prawa

zaś to moc zbioru $Z^X \times Z^Y$. Przyporządkowujmy parze funkcji $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ funkcję $h : X \cup Y \to Z$ wzorem

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & \text{gdy } t \in X, \\ g(t), & \text{gdy } t \in Y. \end{cases}$$

Przyporządkowanie to jest oczywiście żądaną bijekcją.

Przejdźmy do dowodu równości $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{m}\mathfrak{n})^{\mathfrak{p}}$. Zachowując poprzednie oznaczenia mamy teraz pokazać równoliczność zbiorów $Z^X \times Z^Y$ oraz $Z^{X\times Y}$. Parze funkcji $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ przyporządkujmy funkcję $h : Z \to X \times Y$ daną wzorem

$$[h(f, g)]\,(t) = (f(t), g(t))$$

Oczywiście przyporządkowanie to jest różnowartościowe. Jest bijekcją, gdyż funkcja $h(t) = (f(t), g(t))$ jest wartością tego odwzorowania dla pary (f, g).

Dowód równości $(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}$ jest dość subtelny. Mamy tu znaleźć odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną pomiędzy zbiorami

$$\left(X^Y\right)^Z \qquad \text{oraz} \qquad X^{Y\times Z}.$$

Oznacza to, że każdej funkcji $f : Z \to X^Y$ należy przyporządkować w sposób wzajemnie jednoznaczny funkcję $f^* : Y \times Z \to X$. Żądaną funkcją jest

$$f^*(y, z) = [f(z)](y).$$

Czytelnik może sprawdzić, że przyporządkowanie $f \to f^*$ jest bijekcją.

Zadania

6. Znajdź moc zbioru:
a) ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych;
b) funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
c) relacji dwuargumentowych na $\mathbb{R}$;
d) wszystkich relacji na $\mathbb{R}$.

7. Znajdź moc zbioru ciągów zbieżnych o wyrazach:
a) rzeczywistych;
b) naturalnych.

8. Znajdź moc zbioru relacji równoważności na $\mathbb{N}$.

9.* Znajdź moc rodziny wszystkich wypukłych podzbiorów płaszczyzny.

14.3 Zastosowania

Liczba funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - Bijekcje $\mathbb{N}$ - Konstrukcja bardzo osobliwej funkcji - Zadania

Pokażemy teraz, jak za pomocą twierdzenia Cantora-Bernsteina wyznaczać moc rozmaitych zbiorów, a pod koniec skonstruujemy funkcję o bardzo nieintuicyjnych własnościach.

Liczba funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Każda funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wyznaczona przez swoje wartości w punktach wymiernych (tu właśnie korzystamy z ciągłości). Zatem funkcji takich może być co najwyżej tyle, ile jest wszystkich funkcji $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, czyli co najwyżej

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Oczywiście funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest przynajmniej $\mathfrak{c}$, gdyż funkcjami takimi są wszystkie funkcje stałe. Zatem wszystkich takich funkcji jest $\mathfrak{c}$.

Skończone podzbiory $\mathbb{R}$

Podzbiorów n-elementowych $\mathbb{R}$ jest co najwyżej tyle, ile ciągów tej długości. Oznaczmy zbiór takich ciągów przez A_n. Ma on moc $\#\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}$. Zatem wszystkich takich zbiorów jest co najwyżej,

$$\#\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \aleph_0 \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Oczywiście takich podzbiorów jest też przynajmniej $\mathfrak{c}$, bo tyle jest podzbiorów jednoelementowych. Zatem wszystkich skończonych podzbiorów jest $\mathfrak{c}$.

Bijekcje $\mathbb{N}$

Przypomnijmy, że w przypadku zbiorów skończonych bijekcja $f : A \to A$ to po prostu permutacja. Na pytanie o liczbę permutacji na zbiorze n-elementowym znamy odpowiedź: jest ich $n!$. Spójrzmy teraz, jak wygląda odpowiedź na analogiczne pytanie dla najprostszego zbioru nieskończonego.

Każda bijekcja zbioru $\mathbb{N}$ jest pewną funkcją $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, więc jest ich co najwyżej

$$\aleph_0^{\aleph_0} \leqslant \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Pokażemy, że jest ich dokładnie $\mathfrak{c}$.

W tym celu skonstruujemy rodzinę bijekcji złożoną przynajmniej (w istocie dokładnie) z $\mathfrak{c}$ elementów. Podzielmy zbiór $\mathbb{N}$ na pary: $A_0 = \{0, 1\}$, $A_1 = \{2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$ itd. Każdemu zbiorowi $A \subset \mathbb{N}$ przyporządkujmy bijekcję π_A, która zamienia miejscami elementy wszystkich par A_i dla $i \in A$, pozostałe zaś liczby pozostawia na swoim miejscu. Takich bijekcji jest tyle, ile podzbiorów $\mathbb{N}$, czyli $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Konstrukcja bardzo osobliwej funkcji*

Funkcja $\operatorname{tg} x$ na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste. Nietrudno zmodyfikować tę funkcję tak, aby przyjmowała wszystkie wartości rzeczywiste na zadanym przedziale (a, b). Nasza osobliwa funkcja będzie miała własność mocniejszą, z pozoru niemożliwą: będzie przyjmować wszystkie wartości rzeczywiste na *każdym* niepustym przedziale otwartym.

Rozważmy relację równoważności $\sim$ na $\mathbb{R}$ zadaną warunkiem

$$(x \sim y) \longleftrightarrow (x - y \in \mathbb{Q}).$$

Każda klasa abstrakcji tej relacji ma moc $\aleph_0$. Niech $\mathfrak{m}$ będzie liczbą klas abstrakcji. Suma wszystkich klas abstrakcji ma moc $\mathfrak{m} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{m}$. Ale ta suma, to cała prosta, zatem liczba klas abstrakcji wynosi $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$.

Rozważmy bijekcję ϕ, która każdej z klas abstrakcji przypisuje pewną liczbę rzeczywistą. Funkcja

$$f(x) = \phi\left([x]_\sim\right)$$

ma żądaną własność. Rzeczywiście, każda klasa abstrakcji to przesunięty równolegle zbiór $\mathbb{Q}$, każdy taki zbiór jest gęsty w $\mathbb{R}$, tzn. przecina dowolny przedział otwarty. Zatem na każdym przedziale otwartym funkcja f przyjmuje wartości odpowiadające wszystkim klasom, czyli wszystkie wartości rzeczywiste.

Zadania

10. Ile jest wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$? Ile spośród nich to funkcje ciągłe?

11. Znajdź moc zbioru nieskończonych przeliczalnych podzbiorów prostej.

12. Na ile sposobów można uporządkować liniowo zbiór $\mathbb{N}$?

$$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$$

13. Relacja „$A \sim B \longleftrightarrow$ zbiór$(A \div B)$ jest skończony” jest relacją równoważności na rodzinie $P(\mathbb{N})$ podzbiorów $\mathbb{N}$. Ile klas abstrakcji wyznacza ta relacja?

14.* Znajdź moc zbioru bijekcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Możesz założyć prawdziwość uogólnionej hipotezy continuum.

15.* Ile jest funkcji ściśle rosnących: a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; b)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Wykład 15

Teoria ZF i liczby porządkowe

Dotychczas nie podjęliśmy bardzo podstawowej kwestii związanej z arytmetyką liczb kardynalnych: czy każde dwie liczby kardynalne są porównywalne? To przemilczenie nie jest przypadkowe, odpowiedź zależy od tego, jaką aksjomatykę teorii mnogości przyjmiemy za podstawę dalszych rozważań.

Odpowiedzią na paradoks Russella — związany ze zbiorem wszystkich zbiorów — i inne podobne kłopoty natury logicznej była aksjomatyzacja teorii mnogości. Do czasów Russella matematycy mogli operować swobodnie dowolnymi zbiorami. Od czasów aksjomatyzacji teorii mnogości można było operować tylko zbiorami, których istnienie dało się wyprowadzić z aksjomatów. Zbiór wszystkich zbiorów tej własności nie miał.

Liczby porządkowe stanowię uogólnienie liczebników naturalnych (pierwszy, drugi, trzeci, ...) na przypadek zbiorów nieskończonych. Odkryjemy je przy okazji formułowania jednego z aksjomatów teorii ZF.

15.1 Aksjomaty teorii ZF

Pięć początkowych aksjomatów - Aksjomat nieskończoności - Trzy aksjomaty (prawie) ostatnie - Aksjomat wyboru i dobre porządki - Zadania

Przyjęta obecnie aksjomatyka teorii mnogości została zaproponowana przez Ernsta Zermelo (1908), a uzupełniona przez Abrahama Fraenkla (1921). Matematyka rozwijana na bazie tych aksjomatów znana jest dziś jako teoria ZF. Aksjomaty formułować będziemy w języku tylko częściowo formalnym.

W praktyce matematycznej zbiory oznaczamy dużymi literami, a ich elementy — małymi. Na gruncie formalnej teorii mnogości wszystkie obiekty są zbiorami, więc takie rozróżnienie nie ma sensu. Zwyczajowo wszystkie zbiory oznaczamy małymi literami.

Pięć początkowych aksjomatów

A1 (ekstensjonalności)
Dla dowolnych x, y

$$x = y \longleftrightarrow (\forall z)\,(z \in x \longleftrightarrow z \in y).$$

Innymi słowy, zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.

A2 (pary) Dla dowolnych x, y istnieje zbiór $\{x, y\}$ taki, że dla dowolnego z

$$z \in \{x, y\} \longleftrightarrow (z = x \vee z = y).$$

Oznacza to, że dla dowolnych x, y istnieje zbiór złożony z tych elementów. Ponieważ x nie musi być różne od y, więc wynika stąd istnienie zbiorów jednoelementowych $\{x\} = \{x, x\}$.

Parę uporządkowaną definiuje się (według pomysłu Kuratowskiego) jako zbiór

$$\{x, \{x, y\}\}.$$

Istotnie, zbiór ten pozwala odróżnić, który element jest traktowany jako pierwszy, a który jako drugi.

A3 (sumy) Dla każdego x istnieje zbiór będący sumą zbiorów należących do x. Formalnie, dla każego x

$$\exists y\ (\forall z\,(z \in y \longleftrightarrow \exists t\,(z \in t \wedge t \in x))\,.$$

W języku potocznym suma ustalonego elementu nie zawsze ma sens, gdyż nie każdy obiekt jest zbiorem. Na gruncie formalnej teorii ZF zakłada się, że uniwersum matematyczne składa się wyłącznie ze zbiorów. Tylko dlatego powyższy aksjomat ma sens.

A4 (zbioru pustego) Istnieje zbiór pusty, tzn. taki zbiór x, że

$$\forall y\,(y \notin x).$$

A5 (zbioru potęgowego) Dla każdego x istnieje zbiór potęgowy $P(x)$. Aby formalne sformułowanie nie było zbyt skomplikowane, zdefiniujmy najpierw zawieranie zbiorów:

$$z \subset x \longleftrightarrow \forall t\,(t \in z \to t \in x).$$

Aksjomat zbioru potęgowego mówi, że dla każdego x istnieje y takie, że

$$\forall z\,(z \in y \longleftrightarrow z \subset x).$$

Aksjomat nieskończoności

Dotychczasowe aksjomaty były dość oczywiste. Było raczej jasne, jak odpowiednią własność sformułować. Przejdźmy do pierwszego z nieoczywistych: głosi on, że istnieje zbiór nieskończony. Naturalnym sformułowaniem byłoby: Istnieje x takie, że x ma nieskończenie wiele elementów. Niestety niełatwo na tym etapie nadać sens temu wyrażeniu. Jak obejść tę trudność, pokażemy w dalszej części wykładu. Na razie zadowolimy się sformułowaniem całkowicie nieformalnym.

A6 (zbioru nieskończonego) Istnieje zbiór nieskończony.

Trzy aksjomaty (prawie) ostatnie

Dwa kolejne aksjomaty mówią, jak z danego zbioru powstają nowe: przez operację wyróżniania czy też obraz zbioru.

A7 (wyróżniania) Dla dowolnego x i dowolnej formuły ϕ istnieje zbiór y taki, że

$$\forall z\,(z \in y \longleftrightarrow (z \in x \wedge \phi(z)).$$

Innymi słowy z każdego zbioru można wyciąć podzbiór złożony z wszystkich jego elementów spełniających zadaną formułę.

A8 (zastępowania) Dla dowolnego x i dowolnej funkcji f określonej na x istnieje obraz $f(x)$.

Jest to sformułowanie bardzo nieformalne. W pełni poprawne sformułowania wymagałoby obejścia terminów funkcja i obraz funkcji, na razie na gruncie ZF niezdefiniowanych.

Ostatni z tej serii aksjomatów ma charakter bardziej tajemniczy.

A9 (regularności albo ufundowania) Dla dowolnego x istnieje $y \in x$ taki, że $y \cap x = \emptyset$.

Zastanówmy się, co by było gdyby ten aksjomat był fałszywy. W takim przypadku dla pewnego x i dowolnego $y \in x$ zbiór $y \cap x$ byłby niepusty. W takiej sytuacji istniałby ciąg nieskończony

$$\ldots \in y_3 \in y_2 \in y_1 \in x.$$

Aksjomat regularności gwarantuje, że taka nieintuicyjna sytuacja nie pojawi się. W szczególności, dla dowolnego x mamy $x \notin x$.

Aksjomat wyboru i dobry porządek

Teoria zbudowana na bazie tych dziewięciu aksjomatów znana jest jako teoria ZF. W praktyce matematycy przyjmują jeszcze jeden aksjomat, aksjomat wyboru (Axiom of Choice). Teoria ZF wzbogacona o ten aksjomat znana jest jako teoria ZFC.

A10 (wyboru) Dla dowolnej rodziny niepustych zbiorów parami rozłącznych istnieje zbiór mający z każdym ze zbiorów tej rodziny dokładnie jeden wspólny element.

Ten niewinnie wyglądający aksjomat wywoływał w swoim czasie spore kontrowersje. W następnym wykładzie postaramy się wyjaśnić, dlaczego.

Tam też zobaczymy, że aksjomat wyboru jest ściśle związany z pojęciem dobrego porządku. **Dobrym porządkiem** na zbiorze A nazywamy porządek liniowy taki, że dowolny niepusty podzbiór A ma element najmniejszy. Najważniejszym przykładem jest naturalny porządek na $\mathbb{N}$. Oto inny przykład takiego porządku:

$$0, 2, 4, 6, \ldots, 1, 3, 5, \ldots$$

Można podać wiele innych przykładów, ale zwykle są sztuczne.

Dwa zbiory dobrze uporządkowane mają ten sam typ porządkowy, gdy istnieje pomiędzy nimi izomorfizm porządkowy. O dwu takich zbiorach mówimy, że mają tę samą liczbę porządkową. Innymi słowy, **liczba porządkowa** to typ zbioru dobrze uporządkowanego.

Zwróć uwagę, że o ile liczba kardynalna (moc) zbioru jest cechą samego zbioru, to liczba porządkowa (typ uporządkowania) zależy od przyjętego porządku. Naturalny porządek na $\mathbb{N}$ i nietypowy pokazany wyżej mają oczywiście inny typ. W porządku naturalnym tylko 0 nie ma bezpośredniego poprzednika, w tym drugim odnosi się to także do 1.

Liczby naturalne pozwalają nam numerować elementy zbioru przeliczalnego. Za pomocą liczb porządkowych będziemy mogli numerować także elementy zbiorów nieprzeliczalnych.

W dalszej części wykładu dojdziemy do liczb porządkowych inną drogą, wprowadzimy też oznaczenia. Przy tych oznaczeniach naturalny porządek na $\mathbb{N}$ okaże się porządkiem typu ω, podany wyżej mniej typowy — porządkiem typu $\omega + \omega$.

Zadania

1. Zapisz w języku formalnym, tzn. korzystając wyłącznie z symboli logicznych i znaku równości:
a) x jest zbiorem jednoelementowym;
b) istnieje zbiór przynajmniej dwuelementowy;
c) istnieje zbiór co najwyżej dwuelementowy.

2. Zapisz w języku formalnym formułę „y jest potęgą zbioru x" nie korzystając z symbolu zawierania.

3. Porządek

$$0, 3, 6, \ldots, 1, 4, 7, \ldots, 2, 5, 8, \ldots$$

ma oczywiście inny typ porządkowy niż nietypowy porządek rozważany w tekście. Podaj przynajmniej dwie własności sformułowane w języku porządków (poprzednik, następnik itd.), które różnią te dwa porządki.

$\diamondsuit\ \diamondsuit\ \diamondsuit$

4. Zbiór jest skończony, gdy jego moc jest liczbą naturalną. Zdefiniuj pojęcie zbioru skończonego nie korzystając z liczb kardynalnych (w szczególności z naturalnych).

15.2 Aksjomat nieskończoności i liczby porządkowe

Aksjomat nieskończoności i liczby naturalne - Duża Ω czyli ω_1 - Zadania

Przejdźmy teraz do obiecanej formalnej postaci aksjomatu nieskończoności. Przy okazji odkryjemy liczby porządkowe. Pozwolą one przedłużyć numerację *pierwszy, drugi, trzeci, ...* na poziom pozaskończony.

Aksjomat nieskończoności i liczby naturalne

Liczby naturalne pełnią dwie odrębne funkcje. Służą do zliczania obiektów: jeden, dwa, trzy, ..., ale także do numerowania: pierwszy, drugi, trzeci, ... Na poziomie zbiorów skończonych te dwie funkcje są prawie nieodróżnialne, ale na poziomie nieskończonym różnią się zasadniczo. Liczba kardynalna określa moc zbioru, liczba porządkowa — położenie elementu w ciągu: skończonym, nieskończonym albo pozaskończonym, ten ostatni termin wyjaśni się wkrótce.

Przypomnijmy, iż aksjomat nieskończoności głosi, że istnieje zbiór nieskończony. W formalnym języku teorii mnogości możemy to wyrazić następująco:

$$\exists x\ (\emptyset \in x \wedge (\forall y\,(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))\,.$$

Spójrzmy, jak wyglądają kolejne elementy tego zbioru:

$$\emptyset, \quad \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$$

W podobny sposób otrzymujemy kolejne elementy tego zbioru. Jest jasne, że jest to zbiór nieskończony. Gdy pokażemy jeszcze dwa kolejne łatwiej będzie dostrzec ogólną postać tych zbiorów:

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

Na gruncie formalnej teorii mnogości kolejne elementy tego zbioru nazywamy liczbami naturalnymi i oznaczamy 0, 1, 2, 3, ... Zauważ, że każda liczba naturalna definiowana jest tu jako zbiór jej poprzedników.

$$1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \quad 4 = \{0, 1, 2, 3\}, \ldots$$

Zauważmy jeszcze, że przy takiej formalizacji relacja mniejszości na $\mathbb{N}$ definiowana jest jako zawieranie.

Liczby porządkowe

Spójrzmy, co dzieje się dalej. Oznaczmy przez ω zbiór liczb naturalnych, takie nietypowe oznaczenie stosujemy, gdy myślimy o $\mathbb{N}$ jako zbiorze uporządkowanym:

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Po nich następują $\omega + 1$, $\omega + 2$ itd.:

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\},$$

$$\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1\}, \ldots$$

Po nieskończenie wielu krokach natrafimy oczywiście na

$$\omega + \omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\},$$

Skonstruowane w ten sposób zbiory nazywamy **liczbami porządkowymi**, a ciąg numerowany takimi liczbami **ciągiem pozaskończonym**.

Zauważ, że liczba porządkowa jest zbiorem, przy czym wraz z każdym elementem zawiera też wszystkie go poprzedzające. Na odwrót, zbiór liczb porządkowych zawierający wraz z każdą liczbą także wszystkie ją poprzedzające jest liczbą porządkową.

Relacja zawierania jest porządkiem liniowym na liczbach porządkowych. Można wykazać, że jest to dobry porządek.

Zauważmy jeszcze, że liczby porządkowe dzielą się na dwie kategorie: liczby **następnikowe** tzn. takie liczby, które mają bezpośredniego poprzednika (dodatnie liczby naturalne, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + \omega + 1$ itp.) oraz pozostałe, zwane **granicznymi** (ω, $\omega + \omega$, ω^2 itp.).

Duża omega, czyli ω_1

Wszystkie dotychczas rozważane liczby były typami zbiorów przeliczalnych. W następnym wykładzie przekonamy się, że przy założeniu aksjomatu wyboru każdy zbiór można dobrze uporządkować, tak więc muszą istnieć też liczby porządkowe odpowiadające zbiorom nieprzeliczalnym. Najmniejszą z nich jest

$$\omega_1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \ldots\},$$

dawniej oznaczana symbolem Ω. Zauważ, że choć sama ω_1 jest nieprzeliczalna, to każda liczba porządkowa od niej mniejsza jest przeliczalna.

Liczbę porządkową mającą moc większą niż którykolwiek z jej poprzedników nazywamy **początkową**. W szczególności, taki liczbami są wszystkie liczby naturalne, ω (oznaczana dalej symbolem ω_0), ω_1. Kolejną liczbą początkową jest ω_2 itd. Oczywiście nieskończone liczby początkowe są granicznymi.

Pozaskończona oś liczbowa i skala alefów

Pamiętajmy, że formalnie każda z liczb porządkowych to zbiór jej poprzedników. Dlatego możemy mówić o mocach liczb porządkowych. Moce liczb ω_0, ω_1, ω_2, ... oznaczamy symbolem odpowiednio $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ...

Wyobraźmy sobie pozaskończony odpowiednik osi liczbowej. Po liczbach naturalnych pojawia się ω_0 (i odpowiadająca jej liczba kardynalna $\aleph_0$), potem nieprzeliczalnie wiele przeliczalnych liczb porządkowych $\omega_0 + 1$, $\omega_0 + 2$, ..., aż wreszcie pojawi się ω_1 (a wraz z nią znów liczba kardynalna $\aleph_1$), po niej mnóstwo kolejnych liczb porządkowych i znów początkowa liczba porządkowa ω_2 i jej kardynalny odpowiednik $\aleph_2$ itd. Liczby kardynalne występują tu rzadko, gdyż odpowiadają tylko początkowym liczbom porządkowym.

Skala alefów (i omeg) jest niewyobrażalnie długa. Fakt ten wyraża poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 15.2.1 (Buraliego-Fortiego)
Nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych.

Dowód: Załóżmy, że taki zbiór istnieje. Gdyby tak było, byłby on pewną liczbą porządkową α. Ale wówczas mielibyśmy $\alpha \in \alpha$, sprzeczność z aksjomatem regularności.

Twierdzenie to stanowi kolejne ostrzeżenie, by wyrażenia „zbiór wszystkich ..." w teorii mnogości używać ostrożnie.

Zadania

5. Dla jakich zbiorów dobrze uporządkowanych porządek odwrotny też jest dobrym porządkiem?

6. Podaj przykład podzbioru $\mathbb{R}$ uporządkowanego przez relację $\leqslant$ w typ: a) $\omega + 1$; b) w typ $\omega + \omega$.

7. Uporządkuj $\mathbb{N}$ w typ ω^2, czyli najmniejszy typ porządkowy większy od typów ω, $\omega + \omega$, $\omega + \omega + \omega$, ...

$$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$$

8. Rozważmy formułę $\varphi(x)$

$$(\emptyset \in x \wedge (\forall y\, (y \in x \to y \cup \{y\} \in x))\,.$$

Aksjomat nieskończoności $\exists x \phi(x)$ głosi, że istnieje zbiór zawierający $\mathbb{N}$. Korzystając z formuły $\varphi(x)$ zapisz zdanie „Istnieje zbiór równy $\mathbb{N}$."

9. Uzasadnij, że każdy przeliczalny podzbiór ω_1 jest ograniczony.

10. Uzasadnij poprawność **zasady indukcji pozaskończonej**: Jeżeli dla dowolnej liczby porządkowej α z prawdziwości $T(\beta)$ dla wszystkich $\beta < \alpha$ wynika prawdziwość $T(\alpha)$, to $T(\alpha)$ zachodzi dla wszystkich α.

11. **Otwartym** podzbiorem prostej nazywamy zbiór będący sumą (skończonej lub nieskończonej) rodziny przedziałów otwartych. Rodzina **zbiorów borelowskich** prostej, to najmniejsza rodzina zbiorów zawierająca wszystkie podzbiory otwarte i zamknięta ze względu na trzy operacje: dopełnienie, przeliczalną sumę, przeliczalny przekrój.
a) Uzasadnij, że każdy przeliczalny podzbiór prostej jest borelowski.
b) Wyjaśnij, dlaczego w powyższej definicji można pominąć warunek zamkniętości na przeliczalne przekroje.
c)** Wykaż, że nie każdy podzbiór prostej jest borelowski.

Wsk.: Wykorzystaj poniższą hierachię zbiorów borelowskich:
- B_0 rodzina zbiorów otwartych;
- dla $\alpha \leqslant \omega_1$ $B_{\alpha+1}$ składa się z przeliczalnych sum zbiorów należących do B_α oraz ich dopełnień;
- dla granicznych $\lambda \leqslant \omega_1$ $B_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$.

15.3 Zermelo, Gödel i Cohen

Te trzy nazwiska symbolizują w skrócie historię aksjomatycznej teorii mnogości. Zermelo nadał teorii mnogości charakter teorii aksjomatycznej, Gödel i Cohen wyjaśnili status dwu najważniejszych jej problemów.

Ernst Zermelo (1871-1953), matematyk niemiecki. Studiował matematykę, fizykę i filozofię w Berlinie, Halle i Fryburgu. Pośród jego nauczycieli byli fizyk Max Planck, matematyk Ferdinand Frobenius i filozof Edmund Husserl. Doktoryzował się pracą z rachunku wariacyjnego, promotorem był Hermann

Amandus Schwarz. Po dwu latach asystentury u Maxa Plancka przenosi się do Getyngi, gdzie habilituje się (1899) pracą z kinetycznej teorii gazów. Choć sławę przyniosły mu osiągnięcia z teorii mnogości, fizyką matematyczną zajmował się przynajmniej do lat 30. W roku 1904 publikuje dowód twierdzenia o dobrym porządku. Mimo kontrowersji wokół dowodu praca ta zapewnia mu rok później profesurę w Getyndze. Następne lata poświęca na uściślenie dowodu, prowadzi to stworzenia podstaw aksjomatycznych teorii mnogości. W roku 1910 zostaje profesorem uniwersytetu w Zurychu, ale w roku 1916 odchodzi stamtąd z powodu gruźlicy. Powraca do Niemiec, odtąd utrzymuje się ze skromnej emerytury i lekcji prywatnych. Był zapalonym szachistą. Z tych zainteresowań wyrosła jego praca o grach z pełną informacją.

Kurt Gödel (1906-1978), austriacki logik i matematyk, ur. w Brnie, zm. w Princeton. W okresie przedwojennym związany z Wiedniem. Początkowo zamierzał zostać fizykiem, ale fascynujące wykłady Philippa Furtwänglera z teorii liczb skłoniły go do zajęcia się matematyką. Doktoryzował się pod kierunkiem Hansa Hahna pracą (też dziś klasyczną) o pełności rachunku zdań. Od roku 1940 w Instytucie Studiów Zaawansowanych w Princeton. Wymieniany często jako najwybitniejszy logik od czasów Arystotelesa. Napisał niewiele prac, ale niemal każda z nich w istotny sposób wpłynęła na logikę matematyczną, teorię mnogości i inne działy podstaw matematyki. W okresie powojennym — w Princeton — zajmował się także kosmologią. Należał do najbliższych przyjaciół Einsteina i współtwórcy teorii gier Oskara Morgensterna.

Paul Joseph Cohen (1934-2007), matematyk amerykański. W latach 1950-1953 studiował na Brooklyn College, ale studia te przerwał, gdy dowiedział się, że dwa lata nauki w kolegium wystarczą, by podjąć dalsze studia na Uniwersytecie w Chicago. Już rok później, w roku 1954, uzyskuje tam magisterium, a cztery lata później doktorat, na podstawie pracy poświęconej szeregom trygonometrycznym. Promotorem jest Antoni Zygmund, przed wojną profesor uniwersytetu wileńskiego. Kolejny etap kariery to roczne staże w najbardziej prestiżowych instytucjach: Massachusetts Institute of Technology oraz Instytucie Studiów Zaawansowanych w Princeton. Od roku 1961 do roku 2004, gdy przechodzi na emeryturę, jest profesorem Uniwersytetu Stanforda. Rok 1963 przynosi dwa najsławniejsze jego wyniki: dowód niezależności aksjomatu wyboru i hipotezy continuum od pozostałych aksjomatów ZF. Przynajmniej przez dalsze kilkadziesiąt lat rozwój teorii mnogości był silnie związany z pracami Cohena. W roku 1966 otrzymał Medal Fieldsa, jedyny przypadek uhonorowania tą nagrodą wyników z podstaw matematyki. Choć Cohen miał też wybitne osiągnięcia w zakresie analizy matematycznej, giną one w cieniu jego fundamentalnych odkryć w teorii mnogości.

Wykład 16

Aksjomat wyboru i jego konsekwencje

W dawnej matematyce dowód istnienia obiektu o zadanych własnościach niemal zawsze sprowadzał się do jego konstrukcji. W teorii mnogości i innych nowszych dyscyplinach matematyki zjawiskiem powszechnym są dowody niekonstruktywne: dowodzi się istnienia pewnego obiektu, nie wskazując konkretnego przykładu. W takich dowodach jednym z najważniejszych narzędzi jest aksjomat wyboru. Początkowo budził on spore zastrzeżenia, ale dziś jest zasadniczo powszechnie akceptowany.

16.1 Aksjomat wyboru

Kilka prostych wniosków - Pożyteczna równoważność - Zadania

Z podstawowym sformułowaniem aksjomatu wyboru zetknęliśmy się już w poprzednim wykładzie. Teraz wyprowadzimy z niego kilka najprostszych wniosków.

Kilka prostych wniosków

Przypomnijmy: aksjomat wyboru głosi, że dla dowolnej rodziny zbiorów parami rozłącznych istnieje zbiór mający z każdym ze zbiorów tej rodziny dokładnie jeden wspólny element. Często korzystamy z niego w nieco innej postaci:

Twierdzenie 16.1.1 *Dla dowolnej rodziny zbiorów $\{A_t : t \in T\}$ istnieje funkcja $f : T \to \bigcup_{t\in T} A_t$ taka, że $f(t) \in A_t$ dla dowolnego $t \in T$.*

Funkcja, o której mowa wyżej, zwana jest funkcją wyboru.

Dowód: Aksjomat wyboru mówi o rodzinie zbiorów parami rozłącznych. Rozważmy zatem rodzinę

$$\{A_t \times \{t\} : t \in T\}.$$

Tak zmodyfikowana rodzina „kopii" zbiorów A_t jest już parami rozłączna. Zatem na mocy aksjomatu wyboru istnieje zbiór $\{(a_t, t) : t \in T\}$ zawierający po jednym elemencie z każdego zbioru $A_t \times t$. Przyporządkowanie $f(t) = a_t$ jest żądaną funkcją.

Oczywiście z powyższego twierdzenia wynika oryginalna wersja aksjomatu wyboru. Aksjomat i ostatnie twierdzenie są równoważne.

Wniosek 16.1.1 *Iloczyn kartezjański dowolnej rodziny zbiorów niepustych jest zbiorem niepustym.*

Istotnie, niech $\{A_t : t \in T\}$ będzie rodziną zbiorów niepustych, a funkcja f funkcją wyboru dla tej rodziny. Funkcja f jest elementem żądanego iloczynu.

Zauważmy, iż uzasadnienie niepustości iloczynu kartezjańskiego zbiorów niepustych w *konkretnych* przypadkach rzadko wymaga zastosowania aksjomatu wyboru. Zazwyczaj możemy wskazać konkretny element tego iloczynu. Tylko dowód twierdzenia *ogólnego* odwołuje się do tego szczególnego aksjomatu.

Pożyteczna równoważność

Wykażemy teraz proste, ale ważne twierdzenie, w którego dowodzie korzystamy z aksjomatu wyboru w sposób szczególnie wyraźny.

Twierdzenie 16.1.2 *Injekcja $f : X \to Y$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje surjekcja $g : Y \to X$.*

Dowód: Niech $f : X \to Y$ będzie injekcją, $f(X) \subset Y$ obrazem X, $a \in X$ jakimkolwiek ustalonym elementem. Funkcja $g : Y \to X$ określona wzorem

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{jeśli } y \in F(X); \\ a, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

jest żądaną surjekcją.

Na odwrót, niech $g : Y \to X$ będzie surjekcją. Zbiory $\{g^{-1}(x) : x \in X\}$ są zatem niepuste i parami rozłączne. Na mocy aksjomatu wyboru istnieje zbiór A mający z każdym elementem tej rodziny dokładnie jeden punkt wspólny, oznaczmy go przez a_x. Funkcja zadana wzorem $f(x) = a_x$ jest żądaną injekcją.

Zadania

1. Dowód twierdzenia głoszącego, że przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym wykorzystuje aksjomat wyboru (choć oczywiście na str. 99/100 tego nie akcentowaliśmy). W którym miejscu?

2. Wykaż, że funkcja ma granicę w punkcie w sensie Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy ma granicę w sensie Heinego. W którym miejscu korzystamy z aksjomatu wyboru?

16.2 Twierdzenie Zermeli i hipoteza continuum

Twierdzenie Zermeli - Hipoteza continuum (jeszcze raz) - Zadania

Na elementarnym kursie teorii mnogości jedynym naturalnym dobrym porządkiem jest naturalny porządek na $\mathbb{N}$. Twierdzenie Zermeli głosi, że dobrze uporządkować można dowolny niepusty zbiór.

Twierdzenie Zermeli

Z aksjomatu wyboru tylko czasem korzystamy w sposób jawny, często robimy za pomocą twierdzeń z niego wynikających, w szczególności twierdzenia Zermeli i lematu Kuratowskiego-Zorna.

Twierdzenie 16.2.1 (Zermeli)
Przy założeniu aksjomatu wyboru każdy niepusty zbiór można dobrze uporządkować.

Twierdzenie to ma charakter egzystencjalny. Choć mówi ono o istnieniu dobrego porządku nie podpowiada, jak taki porządek skonstruować. W przypadku $\mathbb{R}$ i innych zbiorów mocy continuum trudno go sobie wyobrazić.

Szkic dowodu: Niech X będzie ustalonym zbiorem niepustym. Na mocy aksjomatu wyboru istnieje funkcja wyboru

$$c(x) : P(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$$

dla rodziny niepustych podzbiorów X. Zdefiniujmy ciąg pozaskończony (przypomnijmy: ciąg numerowany liczbami porządkowymi) w następujący sposób:

$$x_0 = c(X), \qquad x_\alpha = c\left(X \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}\right).$$

Innymi słowy, kolejnym liczbom porządkowym przyporządkowujemy elementy zbioru X. Z konstrukcji ciągu i określenia funkcji wyboru wynika, że jest

to przyporządkowanie różnowartościowe: różne elementy mają różne numery. Pokażemy, że każdy element X ma jakiś numer.

Załóżmy na razie, że proces definiowania tego ciągu gdzieś się urywa. Niech a_λ będzie pierwszym wyrazem, którego nie da się określić. Oznacza to, że

$$X = \{x_\beta : \beta < \lambda\}.$$

Tak więc elementy zbioru X zostały ponumerowane liczbami porządkowymi. Taka numeracja wyznacza oczywiście dobry porządek na X.

Skąd pewność, że ten proces się urywa? Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas każdej liczbie porządkowej odpowiadałby pewien element zbioru X. Istniałaby zatem wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy elementami *zbioru* X a liczbami porządkowymi, które *zbioru nie tworzą*. Nie jest to możliwe. Krótko mówiąc: numerując liczbami porządkowymi elementy jakiegoś zbioru nie możemy wykorzystać wszystkich liczb porządkowych. Uzasadnienie bardziej formalne wykorzystuje aksjomat zastępowania.

Wniosek 16.2.1 (Prawo trichotomii dla liczb kardynalnych)
Dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ *zachodzi jedna z trzech możliwości:*

$$\mathfrak{m} < \mathfrak{n}, \qquad \textit{albo} \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{n}, \qquad \textit{albo} \qquad \mathfrak{m} > \mathfrak{n}.$$

Dowód: Niech $\mathfrak{m} = \#X$, $\mathfrak{n} = \#Y$. Na mocy twierdzenia Zermeli zbiory X, Y można dobrze uporządkować, niech α, β będą liczbami porządkowymi odpowiadającymi tym porządkom. Zachodzi jedna z możliwości: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ albo $\alpha > \beta$. Różne liczby porządkowe mogą odpowiadać zbiorom o tej samej mocy, więc przechodząc do liczb kardynalnych otrzymujemy $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ lub $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ lub $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$. Stąd wynika już teza wniosku.

Hipoteza continuum (jeszcze raz)

Z twierdzenia Zermeli łatwo wywnioskować inną postać hipotezy continuum.

Twierdzenie 16.2.2 *Przy założeniu aksjomatu wyboru i hipotezy continuum dowolny zbiór mocy continuum można uporządkować tak, aby każdy jego element miał przeliczalnie wiele poprzedników.*

Dowód: Na mocy twierdzenia Zermeli zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ można dobrze uporządkować. Porządek można wybrać tak, aby był to typ początkowy. Przy założeniu hipotezy continuum musi to być typ ω_1, w przeciwnym razie zbiór $\mathbb{R}$ zawierałby podzbiór mocy pośredniej $\aleph_1$. Porządek typu ω_1 ma żądaną własność.

Zadania

3. Uzasadnij, że z twierdzenia Zermeli wynika aksjomat wyboru.

4. Pokaż, że równość $\mathfrak{c} = \aleph_1$ pociąga za sobą hipotezę continuum.

$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$

5. Korzystając z hipotezy continuum skonstruuj podzbiór płaszczyzny taki, że:
a) każdy jego przekrój z prostą poziomą jest przeliczalny;
b) każdy jego przekrój z prostą pionową zawiera wszystkie jej punkty oprócz przeliczalnie wielu.
Zbiór taki to tzw. paradoksalny zbiór Mazurkiewicza: podzbiór płaszczyzny, który oceniany na podstawie przekrojów poziomych wydaje się niemal pusty, a na podstawie przekrojów pionowych — niemal całą płaszczyzną.

16.3 Lemat Kuratowskiego - Zorna

Wprowadzenie - Pierwsze zastosowanie - Twierdzenie o istnieniu bazy - Dowód lematu

Lemat Kuratowskiego-Zorna to jeszcze jedna ukryta postać aksjomatu wyboru. Na podstawowym kursie matematyki wyższej pierwszym i najważniejszym jego zastosowaniem jest twierdzenie o istnieniu bazy w przestrzeni liniowej. Dowód ten nie jest trudny, ale poprzedzimy go innym, jeszcze prostszym, rozumowaniem o podobnym charakterze.

Wprowadzenie

Niektóre obiekty matematyczne, w szczególności baza przestrzeni liniowej, są definiowane jako maksymalne elementy pewnej rodziny. Element maksymalny nie zawsze istnieje, przykładem rodzina skończonych podzbiorów prostej. Nie ma tu elementu maksymalnego, gdyż po dodaniu punktu do zbioru skończonego zbiór nadal jest skończony. Lemat Kuratowskiego-Zorna wskazuje założenia gwarantujące istnienie elementu maksymalnego.

Lemat Kuratowskiego - Zorna można formułować dla dowolnych częściowych porządków, ale w najważniejszych zastosowaniach chodzi o relację zawierania zbiorów. Dalej ograniczymy się do takiego przypadku.

Twierdzenie 16.3.1 (lemat Kuratowskiego-Zorna)
Jeżeli każdy łańcuch w pewnej niepustej rodzinie zbiorów jest ograniczony z góry, to zawiera ona element maksymalny.

Jak zwykle, gdy mowa o zbiorach słowo „maksymalny" oznacza maksymalny ze względu na relację zawierania. Tak więc element maksymalny oznacza tu taki element rodziny zbiorów, który nie zawiera się w żadnym innym.

Szkic dowodu przedstawimy pod koniec tego podrozdziału.

Pierwsze zastosowanie

Rozważmy rodzinę złożoną z wszystkich podzbiorów płaszczyzny, które nie zawierają trójki punktów tworzących trójkąt równoboczny. Rodzina taka jest niepusta, należy do niej każda prosta. Wykażemy, iż ma ona element maksymalny. Nie jest to matematycznie szczególnie interesujące, ale dowód daje okazję, by poznać ważną technikę dowodową w wyjątkowo prostej postaci.

Rozważmy rodzinę wszystkich podzbiorów płaszczyzny o wskazanej własności. Pokażemy, że każdy łańcuch $\{A_t \in T\}$ ma ograniczenie górne. Konkretnie, ograniczeniem takim jest suma zbiorów tego łańcucha.

Musimy pokazać, że żadne trzy punkty zbioru $\bigcup_{t\in T} A_t$ nie tworzą trójkąta równobocznego. Niech P, Q, R będą punktami płaszczyzny należącymi do tej sumy. Zatem dla pewnych $p, q, r \in T$ mamy

$$P \in A_p, \qquad Q \in A_q, \qquad R \in A_r.$$

Ponieważ zbiory A_p, A_q oraz A_r są elementami łańcucha, więc któryś z nich, nazwijmy go A, jest największym z nich. Zatem $P, Q, R \in A$. Z założenia A jest jednym ze zbiorów rozważanej rodziny zbiorów. Tak więc punkty P, Q, R nie tworzą trójkąta równobocznego.

Skoro każdy łańcuch rozważanej rodziny zbiorów ma ograniczenie górne, to na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna ma ona element maksymalny.

Twierdzenie o istnieniu bazy

Ta część wykładu zakłada, że Czytelnik zetknął się już z elementami algebry liniowej, przynajmniej takie pojęcia jak liniowa niezależność wektorów i baza nie są mu obce. Ograniczamy się tu tylko do ich przypomnienia.

Przypomnijmy, że zbiór wektorów nazywamy liniowo niezależnym, gdy dla dowolnych parami różnych wektorów $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ tego zbioru oraz współczynników α_1, α_2, ... α_n zachodzi implikacja

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0} \longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Maksymalny zbiór liniowo niezależny nazywamy bazą.

Wykażemy teraz, że każda nietrywialna (tzn. zawierająca choć jeden wektor niezerowy) przestrzeń liniowa V ma bazę. W tym celu rozważmy rodzinę wszystkich liniowo niezależnych podzbiorów przestrzeni V. Rodzina ta jest niepusta, gdyż zawiera podzbiory jednoelementowe złożone z wektorów niezerowych. Pokażemy, że każdy łańcuch tej rodziny ma ograniczenie górne.

Niech $\{A_t : t \in T\}$ będzie ustalonym łańcuchem. Oczywiście $A = \bigcup_{t\in T} A_t$ zawiera każdy z elementów łańcucha. Dla dowodu, że jest on ograniczeniem górnym łańcucha pozostaje pokazać, iż należy do rozważanej rodziny, tzn. jest zbiorem liniowo niezależnym. Niech $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ będą parami różnymi elementami A takimi, że dla pewnych współczynników α_1, α_2, ..., α_n mamy

$$(*) \qquad \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Niech $\boldsymbol{v}_1 \in A_{t_1}$, $\boldsymbol{v}_2 \in A_{t_2}$, ..., $\boldsymbol{v}_n \in A_{t_n}$. Zbiory A_{t_i} tworzą łańcuch skończony, więc jeden z nich, nazwijmy go A_t, jest największy: zawiera pozostałe. Zatem wektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ należą do A_t. Z założenia zbiór A_t jest liniowo niezależny, więc na mocy warunku $(*)$ wszystkie współczynniki α_i są równe zeru. Tak więc zbiór A jest liniowo niezależny. Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna rodzina liniowo niezależnych podzbiorów przestrzeni V ma element maksymalny, czyli bazę.

Szkic dowodu lematu Kuratowskiego-Zorna*

Dowód przypomina dowód twierdzenia Zermeli, ale tu poruszamy się na wyższym szczeblu abstrakcji: tam mówiliśmy o zbiorach, tu o rodzinach zbiorów.

Niech X będzie pewnym niepustym zbiorem, $\mathfrak{F}$ — rodziną podzbiorów X, o której mowa w twierdzeniu, funkcja

$$c(x) : P(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}$$

funkcją wyboru. Zauważ, że $c(x)$ przyporządkowuje podrodzinie $\mathfrak{F}$ jeden z jej elemetów. Niech $\mathfrak{A}(A)$ to część wspólna $\mathfrak{F}$ i rodziny nadzbiorów właściwych zbioru A.

Określmy ciąg pozaskończony A_α jego podzbiorów. Rozważamy osobno trzy przypadki, krok początkowy 0, krok następnikowy $\alpha + 1$ i krok graniczny λ:

$$\begin{aligned} A_0 &= \text{dowolny element } \mathfrak{F}; \\ A_{\alpha+1} &= c(\mathfrak{A}(A_\alpha)); \\ A_\lambda &= c\left(\mathfrak{A}\left(\textstyle\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha\right)\right). \end{aligned}$$

Konstrukcja musi się na którymś etapie urwać, gdyż liczby porządkowe nie tworzą zbioru. Z założeń twierdzenia wynika, że krok graniczny jest zawsze wykonalny. Tak więc dla pewnego α nie jest możliwe przejście do następnego kroku. Oznacza to, że A_α jest elementem maksymalnym.

Zadania

6. Wskaż:
a) maksymalny zbiór płaski nie zawierający wierzchołków trójkąta;
b) maksymalną rodzinę parami rozłącznych okręgów zawartych w ustalonej płaszczyźnie.

7. Wykaż na dwa sposoby, że pośród zbiorów płaskich nie zawierających trzech punktów współliniowych istnieje zbiór maksymalny:
a) za pomocą lematu Kuratowskiego-Zorna;
b) podając przykład takiego zbioru.

8. Spróbuj wykazać za pomocą lematu Kuratowskiego-Zorna, że rodzina skończonych podzbiorów prostej zawiera element maksymalny. W którym miejscu dowód załamuje się?

♢ ♢ ♢

9. Wykaż, że z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika aksjomat wyboru. Wsk.: Pokaż, że istnieje funkcja wyboru.

10.* Wykaż, że każdy porządek częściowy można rozszerzyć do liniowego.

16.4 Kontrowersje

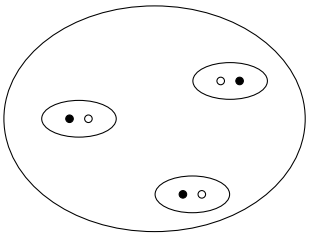
Buty i skarpetki - Dlaczego budzi zastrzeżenia? - Dlaczego jest niezbędny? - A hipoteza continuum? - Zadania

Aksjomat wyboru jest jedynym aksjomatem niekonstruktywnym. Pozostałe aksjomaty *wskazują* na pewien konkretny obiekt (sumę zbiorów, rodzinę podzbiorów itp.), aksjomat wyboru stwierdza tylko, że obiekt o postulowanych własnościach istnieje.

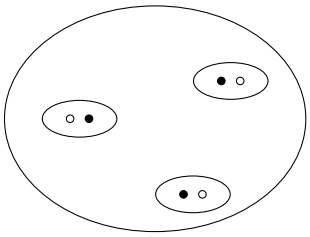
Buty i skarpetki

Przede wszystkim odróżnijmy dwie sytuacje: nieskończony zbiór par butów i nieskończony zbiór par jednakowych skarpetek. W przypadku butów można funkcję wyboru łatwo określić, np. z każdej pary wybieramy prawy but. Zbiór prawych butów jest poprawnie określony, jego istnienie nie ma związku z aksjomatem wyboru.

Inaczej jest w przypadku chaotycznie rozrzuconych par skarpetek. W takim przypadku nie umiemy wskazać żadnej reguły, która by wskazywała, które skarpetki wybieramy. W istocie, różne osoby mogą myśleć o różnych zbiorach.



Paweł myśli o zbiorze A.



Gaweł myśli o zbiorze B.

Aksjomat wyboru zastosowany do takiej sytuacji stwierdza, że istnieje zbiór zawierający z każdej pary tylko jedną skarpetkę. Paweł i Gaweł mogą myśleć o różnych zbiorach, ale te różnice nie mają znaczenia.

Dlaczego budzi zastrzeżenia?

Od samego początku aksjomat wyboru budził zastrzeżenia. Dla części matematyków był on nieakceptowalny, gdyż postulował jedynie istnienie pewnego zbioru, nie dając żadnej konstrukcji. Ówcześni matematycy do takich dowodów nie przywykli. Ta krytyka przybrała na sile, gdy okazało się , że aksjomat wyboru ma zadziwiające, mocno nieintuicyjne, konsekwencje. Najsławniejszą z nich jest paradoks kuli Banacha-Tarskiego.

Dwójka polskich matematyków, Stefan Banach i Alfred Tarski, wykazała (1924), że przy założeniu aksjomatu wyboru kulę można podzielić na skończoną liczbę części, z których da się utworzyć dwie kule tej samej wielkości co pierwotna.

Na pierwszy rzut oka wydaje się to niemożliwe. Przecież przy przesuwaniu tych mniejszych części nie zmienia się ich objętość, więc utworzone w ten sposób kule powinny być mniejsze niż pierwotna! Rzecz w tym, że części, na które dzielimy kulę są niemierzalne: nie da się określić ich objętości.

Dlaczego jest niezbędny?

Jednak mimo tak niepokojących konsekwencji trudno było z aksjomatu wyboru zrezygnować. Wacław Sierpiński w obszernej pracy (1918) przeanalizował rolę tego aksjomatu w dowodach kilkudziesięciu twierdzeń. Okazało się, że tylko w nielicznych przypadkach można było ominąć kontrowersyjny aksjomat nieco komplikując dowód. Sierpiński zauważył także, iż nawet krytycy aksjomatu (m.in. Poincaré i Lebesgue) bezwiednie z niego korzystają.

Aksjomat wyboru odgrywa w matematyce rolę zbyt ważną, by łatwo z niego zrezygnować. W szczególności, korzystamy z niego, gdy dowodzimy, że przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym, a także dowodząc równoważności definicji Cauchy'ego i Heinego. W zasadzie aksjomat wyboru jest dziś w pełni akceptowany.

Niezależność

Teoria ZF wzbogacona o aksjomat wyboru znana jest jako ZFC. Obecnie jest ona dość powszechnie akceptowaną podstawą całej matematyki. Wydaje się, że teoria ZF jest fundamentem całkowicie bezpiecznym, tzn. nie prowadzi do sprzeczności. A czy równie bezpiecznym fundamentem jest teoria ZFC?

Kwestię tę wyjaśnił w roku 1940 Kurt Gödel. Wykazał on, że jeżeli niesprzeczna jest teoria ZF, to także teoria ZFC jest niesprzeczna. Z drugiej strony Paul Joseph Cohen w roku 1963 wykazał, że aksjomat wyboru jest od pozostałych aksjomatów ZF niezależny. Oznacza to, że matematykę można rozwijać także przyjmując, że aksjomat wyboru jest fałszywy.

Jedną z najciekawszych prób stworzenia takiej alternatywnej matematyki był **aksjomat determinacji**, zaproponowany w roku 1962 przez wrocławskich matematyków Jana Mycielskiego i Hugona Steinhausa. Z wielu powodów jest interesujący, wynika z niego w szczególności, że wszystkie podzbiory prostej są mierzalne w sensie miary Lebesgue'a. W roku 1988 wykazano, iż przy założeniu, że istnieją pewne specjalne duże liczby kardynalne aksjomat determinacji nie prowadzi do sprzeczności.

A hipoteza continuum?

Historia hipotezy wiąże się ściśle z historią aksjomatu wyboru. W roku 1940 Gödel wykazuje, że jest niesprzeczna z ZFC (zatem możemy przyjąć jej prawdziwość), a w roku 1963 Cohen — że jest niezależna od ZFC (możemy przyjąć, iż jest fałszywa). Metody zastosowane w odniesieniu do aksjomatu wyboru i hipotezy continuum były jednakowe: Gödel w obu przypadkach wykorzystywał tzw. zbiory konstruowalne, Cohen — w obu metodę forcingu.

Nasuwa się pytanie, czy hipoteza continuum nie powinna być zatem jednym z aksjomatów. Raczej nie: aksjomat wyboru i hipoteza continuum mają zasadniczo inny charakter. Aksjomat wyboru jest dla jednych matematyków oczywisty, dla innych kontrowersyjny, ale ma jakieś intuicyjne podstawy.

Z hipotezą continuum jest inaczej. Wiemy tylko tyle, że naturalnie konstruowane nieskończone podzbiory prostej mają moc $\aleph_0$ albo $\mathfrak{c}$. Nie mamy żadnych

intuicyjnych podstaw wierzyć, że nie ma podzbiorów innej mocy. Oczywiście, w świetle wyników Cohena możemy badać, jakie interesujące konsekwencje ma ta hipoteza bądź jej zaprzeczenie.

Z pozoru nie ma żadnego związku pomiędzy aksjomatem wyboru a hipotezą continuum. Ale to tylko złudzenie. Rozważmy **uogólnioną hipotezę continuum**: dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ pomiędzy $\mathfrak{m}$ a $2^{\mathfrak{m}}$ nie ma żadnej pośredniej liczby kardynalnej. Okazuje się, że zachodzi następujące:

Twierdzenie 16.4.1 (Lindenbauma-Tarskiego-Sierpińskiego)
Uogólniona hipoteza continuum implikuje aksjomat wyboru.

Twierdzenie to opublikowali bez dowodu (wraz z kilkudziesięcioma innymi!) w roku 1926 Alfred Tarski i Adolf Lindenbaum. W roku 1939 Tarski wyjechał do USA, Lindenbaum został w roku 1941 zamordowany przez hitlerowców. Dopiero po wojnie (1947) dowód opublikował Sierpiński.

Zadania

11. Wyjaśnij, dlaczego uzasadnienie niepustości iloczynu kartezjańskiego dowolnej rodziny niepustych podzbiorów $\mathbb{N}$ nie wymaga korzystania z aksjomatu wyboru. A jak jest w przypadku $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$?

♢ ♢ ♢

12. Niech $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie ustalonym zbiorem. Dwaj gracze na przemian wybierają liczbę naturalną. Po nieskończenie wielu ruchach powstaje w ten sposób pewien nieskończony ciąg liczb naturalnych, czyli element $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Jeżeli ciąg ten należy do A, wygrywa gracz zaczynający grę, w przeciwnym razie jego przeciwnik. Wykaż, że:
a) jeżeli A jest zbiorem przeliczalnym, to strategię wygrywającą ma II gracz;
b) jeżeli $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus A$ jest zbiorem przeliczalnym, to strategię wygrywająca ma gracz I.

Aksjomat determinacji głosi, że dla dowolnego zbioru A któryś z graczy ma strategię zwycięską.

16.5 Sierpiński, Tarski i Kuratowski

Do roku 1918 polska matematyka odgrywała na świecie rolę bardzo skromną. Tylko kilku matematyków pokonało barierę prowincjonalizmu. Do najważniejszych wyjątków należą pracujący we Francji Józef Maria Hoene-Wroński (równania różniczkowe) oraz matematycy krakowscy: Stanisław Zaremba, Kazimierz Żorawski (także równania różniczkowe) i Franciszek Mertens (teoria liczb). Sytuacja zmienia się po roku 1918, gdy z inicjatywy Zygmunta Janiszewskiego, Wacława Sierpińskiego i Stefana Mazurkiewicza powstaje pismo

Fundamenta Mathematicae poświęcone teorii mnogości, topologii, teorii funkcji rzeczywistych i logice matematycznej. Dzięki koncentracji badań na kilku wybranych — i stosunkowo młodych — dyscyplinach polscy matematycy skupieni wokół Sierpińskiego i Mazurkiewicza (Janiszewski zmarł w 1920 roku) wkrótce zaczęli odgrywać istotną rolę na arenie międzynarodowej. Powstaje też równie silny ośrodek we Lwowie, z Banachem i Steinhausem na czele. W roku 1929 ukazuje się pierwszy numer „Studia Mathematicae" — lwowskiego pisma poświęconego analizie funkcjonalnej i teorii prawdopodobieństwa. Choć nazwisko Banacha pojawiło się u nas w związku z paradoksem kuli, teoria mnogości to margines jego zainteresowań.

W okresie Międzywojnia teorią mnogości zajmowali się Sierpiński, Kuratowski, Tarski, Lindenbaum, Marczewski, Presburger, marginalnie oprócz Banacha także Stanisław Ulam (w przyszłości współtwórca bomby wodorowej) i Stanisław Mazur. Logiką matematyczną oprócz Tarskiego i Lindenbauma zajmowali się też Jan Łukasiewicz (odkrywca logik wielowartościowych), Stanisław Leśniewski, a także Leon Chwistek — krakowski malarz i teoretyk sztuki. Do najwybitniejszych matematyków powojennych zajmujących się podstawami matematyki — łączne określenie dla teorii mnogości i logiki matematycznej — należeli Andrzej Mostowski, Czesław Ryll-Nardzewski i Jerzy Łoś.

Trzej matematycy, którym poświęcamy osobne notki należą niewątpliwie do najwybitniejszych. Sierpiński i Kuratowski osiągnęli znaczącą pozycję w dziejach teorii mnogości, Tarski — wybitną w dziejach logiki.

Wacław Sierpiński (1882-1969), studiował na Carskim Uniwersytecie w Warszawie, studia ukończył w roku 1904. Jego pierwsza praca napisana pod kierunkiem Gieorgija F. Woronoja poprawiała wynik Gaussa odnoszący się do liczby punktów kratowych w kole. Po strajku szkolnym 1905 roku wyjechał do Krakowa, potem do Lwowa. Wkrótce zainteresował się teorią mnogości. Podczas I wojny światowej jako poddany austriacki został internowany. Dzięki zabiegom moskiewskich matematyków dostał zgodę na pobyt w Moskwie, gdzie zetknął się z aktywnym ośrodkiem badań w teorii mnogości. W roku akademickim 1917/18 prowadzi wykłady we Lwowie, ale już w roku 1918 wraca do Warszawy, gdzie rozpoczyna wykłady na Uniwersytecie Warszawskim. Podczas okupacji uczestniczy w tajnym nauczaniu.

Zasadniczy dorobek Sierpińskiego wiąże się z teorią mnogości. Jest też odkrywcą wczesnych fraktali: dywanu i trójkąta Sierpińskiego. Do teorii liczb powrócił po II wojnie światowej. Jego uczniem z tego okresu jest Andrzej Schinzel. Sierpiński jest też autorem dwutomowej monografii z teorii liczb i wielu książek popularyzujących tę dyscyplinę.

Alfred Tarski (1901-1983), zajmował się logiką matematyczną. Najwybitniejszy po Gödlu logik XX w. Przed wojną pracował w gimnazjum im. Żeromskiego w Warszawie. Starania o profesurę najpierw w Krakowie, potem w Poznaniu skończyły się niepowodzeniem. W sierpniu 1938 wyjeżdża do USA, by wygłosić cykl wykładów na Uniwersytecie Harvarda. Przez jakiś czas przebywa w Princeton, gdzie spotyka się z Gödlem. W latach 1942-83 jest profesorem na uniwersytecie w Berkeley, czyniąc ten uniwersytet czołowym ośrodkiem badań nad podstawami matematyki na świecie. Do najważniejszych jego uczniów należą Andrzej Mostowski — jeszcze z okresu przedwojennego — i Julia Robinson, z okresu amerykańskiego.

Kazimierz Kuratowski (1896-1980), urodził się w Warszawie jako syn adwokata. Tamże ukończył gimnazjum, po czym wyjechał do Moskwy, gdzie uzyskał maturę (polskie świadectwa nie uprawniały do podjęcia studiów). W tymże roku (1913) rozpoczyna studia techniczne w Glasgow, miejscowy Carski Uniwersytet w Warszawie był wówczas przez patriotyczną młodzież bojkotowany. Gdy w roku 1915 w Warszawie otwarty zostaje polski uniwersytet, Kuratowski podejmuje na nim studia matematyczne. Do jego najważniejszych nauczycieli należą Janiszewski, Mazurkiewicz, Sierpiński i logik Jan Łukasiewicz. W latach 1927-33 jest profesorem Politechniki Lwowskiej, od roku 1933 do przejścia na emeryturę w roku 1966 (z przerwą wojenną) profesorem Uniwersytetu Warszawskiego. Zajmował się głównie teorią mnogości i topologią, ale też teorią miary i logiką matematyczną. Jego dwutomowa *Topologie* należy do najważniejszych monografii matematycznych XX w., a jedyna praca dotykająca teorii grafów uchodzi za jedną z najistotniejszych w dziejach tej dyscypliny. Do jego uczniów należą Stanisław Ulam, Samuel Eilenberg, w okresie powojennym Ryszard Engelking.

Indeks ważniejszych pojęć, tematów i postaci