Ryszard Magiera

MODELE I METODY STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

Część II

WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE

Wydanie III rozszerzone

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2018

ryszard.magiera@pwr.edu.pl

Autor projektu okładki *Ryszard Magiera.*

Printed in Poland

Skład komputerowy książki w systemie LaTeX wykonał autor. Do sporządzenia wykresów wykorzystano procedury pakietu komputerowego *Mathematica* 11.2 (licencja L4953-2950).

ISBN 978–83–62780–57–0

Wydanie III, Wrocław 2018
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c.
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS sp. z o.o., A.Bieroński, P.Bieroński s.j.

Przedmowa

Książka stanowi drugą część dwutomowego kompendium z zakresu statystyki matematycznej pod tytułem *Modele i metody statystyki matematycznej. Część I. Rozkłady i symulacja stochastyczna* [40] tworzy Rozdział 1, który zawiera podstawowe definicje, twierdzenia i fakty z teorii prawdopodobieństwa stanowiące podstawową bazę do opisu modeli stochastycznych i formułowania metod wnioskowania statystyki matematycznej opisanych w Rozdziałach 2 – 8 niniejszego tomu. W niniejszej książce opisano metody wnioskowania statystycznego w różnych modelach statystycznych znajdujących zastosowania w wielu dziedzinach nauki i techniki.

Rozdział 2 zawiera teoretyczne podstawy statystyki matematycznej. Przedstawiono w nim podstawowe twierdzenia statystyki matematycznej oraz definicje i podstawowe własności statystyk służących do konstrukcji podstawowych narzędzi wnioskowania statystycznego. W rozdziale tym podano również opis ogólnych rodzin rozkładów prawdopodobieństwa o szczególnym znaczeniu w statystyce matematycznej, określających ogólne statystyczne modele obserwacji (*Rodzina rozkładów z parametrem położenia i parametrem skali, Rodzina rozkładów z monotonicznym ilorazem wiarogodności, Rodzina rozkładów z transformowanym czasem, Wykładnicza rodzina rozkładów*). W Rozdziale 3 przedstawiono podstawowe pojęcia, twierdzenia i metody dotyczące estymacji. Rozdział 4 zawiera podstawy teorii testowania hipotez. Opisy testów w konkretnych modelach statystycznych znajdują się w Rozdziale 5 (*Testy parametryczne*) i Rozdziale 6 (*Testy nieparametryczne*). Każdy opis testu zawiera matematyczne założenia modelu oraz określenie hipotez, statystyki testowej i obszaru krytycznego. Większość opisów testów uzupełniona jest przykładami i uwagami o zakresie zastosowań.

Każdy rozdział zawiera wpisy ułożone w kolejności alfabetycznej, zgodnie z tematyką danego rozdziału. Dla uzyskania spójności tematów dotyczących *Metod porównań wielokrotnych*, do wiodącej nazwy tematu wprowadzono dodatkowo znacznik cyfrowy. W Rozdziale 7 omówiono podstawowe modele analizy wariancji i metody porównań wielokrotnych. Rozdział 8 zawiera podstawy teorii statystycznych funkcji decyzyjnych. Opisano podstawowe metody wyznaczania bayesowskich i minimaksowych funkcji decyzyjnych. Przedstawiono koncepcję dopuszczalności i zasadę niezmienniczości funkcji decyzyjnych. Podano podstawowe twierdzenia analizy sekwencyjnej. Omówiono sekwencyjny test ilorazowy. Bardziej kompletna prezentacja tego rozdziału w formie podręcznika akademickiego tworzy osobną książkę [41].

W celu ułatwienia korzystania z literatury w języku angielskim oraz z angielskich wersji komputerowych pakietów statystycznych, polskie nazwy ważnych pojęć uzupełniono terminologią angielską. W tym celu został również dołączony skorowidz terminów angielskich.

Obecne wydanie książki zostało zmienione i rozszerzone w porównaniu do poprzednich wydań. Poprawiono i uzupełniono tekst niektórych tematów oraz dodano nowe tematy, m.in. *Analiza kowariancji, Bayesowskie centralne twierdzenie graniczne, Nierówność Van Treesa, Rodzina rozkładów z transformowanym czasem, Wybór modelu.*

W końcowej części książki umieszczono tablice zawierające oznaczenia i spis podstawowych charakterystyk najczęściej rozpatrywanych rozkładów. W spisie literatury zostały umieszczone pozycje, z których korzystałem przy opracowywaniu tematów zawartych w niniejszej książce.

Wśród licznej i różnorodnej literatury poświęconej teorii prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej, niniejsza książka stanowić może dodatkową pomoc, spełniając jednocześnie dodatkowe funkcje wynikającez zastosowanej formy prezentacji tematów.

Książka adresowana jest przede wszystkim do środowiska akademickiego, w szczególności do studentów matematyki, statystyki, ekonometrii, fizyki i niektórych dziedzin inżynierskich. Zastosowany sposób prezentacji tematów, jak również przejrzysty i precyzyjny opis tematów, mają na celu zwiększenie jej użyteczności dla szerszego kręgu odbiorców - przedstawicieli różnych dyscyplin nauki i techniki.

Wrocław, wrzesień 2018 *Ryszard Magiera*

Spis treści

5

Testy parametryczne

Parametric Tests

Statystyka Fishera ▷ *test dla współczynnika korelacji*

Test Bartletta [**Bartlett's test**] Jest to test do weryfikowania hipotezy o równości wariancji $\sigma_i^2, i = 1, \ldots, k$, dla k populacji o rozkładach normalnych. Nazywany jest również **testem jednorodności wielu wariancji** [**test for homogeneity of several variances**].
Model. $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{i,n_i})$, $i = 1, \ldots, k$, są k niezależnymi próbami z rozkładów normalnych $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.
Hipotezy: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma^2$; $H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma^2$ dla co najmniej jednego i.
Statystyka testowa:

$$T = \frac{1}{C}\left[(N-k)\ln S^2 - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln S_i^2\right],$$

gdzie

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i, \quad C = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N-k}\Big)$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2, \quad \overline{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \; S^2 = \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)S_i^2.$$

W przypadku, gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa, statystyka T ma asymptotyczny (przy $n_1 \to \infty, \ldots, n_k \to \infty$) rozkład $\chi^2(k-1)$.
Obszar krytyczny: $K = \big\{t : t > \chi^2_{k-1}(1-\alpha)\big\}$, gdzie t jest wartością statystyki T, $\chi^2_{k-1}(1-\alpha)$ oznacza kwantyl rzędu $1-\alpha$ rozkładu $\chi^2(k-1)$, a α jest poziomem istotności.

Test Bartletta ma zastosowanie przede wszystkim w ▷ *analizie wariancji* do sprawdzenia założenia o równości wariancji dla k populacji. Nie jest testem odpornym na odchylenia od rozkładu normalnego.

Do sprawdzenia równości dwóch wariancji ($k = 2$) stosuje się ▷ *test F* (s. 224), a przy $n_i = n = const$ można do sprawdzenia hipotezy H_0 zastosować ▷ *test Cochrana* lub ▷ *test Hartleya*. W porównaniu z testem Cochrana i Hartleya, test Bartletta ma większą moc.

Test chi-kwadrat dla wariancji [**χ^2 (chi-square) test of variance**]
Model. Niech $(X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą z populacji, której cecha X ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Hipotezy: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$; $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.
Statystyka testowa:

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2},$$

gdzie S^2 jest (nieobciążoną) wariancją z próby (▷ *momenty z próby* (s. 6)). Przy założeniu, że hipoteza H_0 jest prawdziwa, statystyka T ma rozkład $\chi^2(n-1)$.
Obszar krytyczny: $K = \left\{t : t < \chi^2_{n-1}(\alpha/2) \text{ lub } t > \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)\right\}$, gdzie $\chi^2_{n-1}(q)$ oznacza kwantyl rzędu q rozkładu $\chi^2(n-1)$.

W zastosowaniach praktycznych jako hipotezę alternatywną przyjmuje się częściej $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$. Wtedy obszar krytyczny ma postać: $K = \{t : t > \chi^2_{n-1}(1-\alpha)\}$.

Test Cochrana [**Cochran test**] Jest to test do weryfikowania hipotezy o równości wariancji $\sigma_i^2, i = 1, \ldots, k$, dla $k \geq 2$ populacji o rozkładach normalnych. Jest więc **testem jednorodności wielu wariancji** [**test for homogeneity of several variances**].
Model. $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{in})$, $i = 1, \ldots, k$, są k niezależnymi próbami o tym samym rozmiarze n z rozkładów normalnych $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.
Hipotezy: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma^2$;
$H_1 : \sigma^2_{\max} \neq \sigma^2$, gdzie $\sigma^2_{\max} = \max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2\}$.
Statystyka testowa:

$$G = \frac{\max\{S_1^2, \ldots, S_k^2\}}{\sum_{i=1}^k S_i^2},$$

gdzie S_i^2 $(i = 1, \ldots, k)$ oznacza wariancję z próby $\mathbf{X}_i$.
Obszar krytyczny: $K = \{g : g > G_{k,n-1}(1-\alpha)\}$, gdzie $G_{k,n-1}(1-\alpha)$ oznacza kwantyl rzędu $1-\alpha$ rozkładu statystyki G, a α jest poziomem istotności. Kwantyle $G_{k,n-1}(1-\alpha)$ można odczytać z tablic podanych w [?].

W przypadku $k = 2$, zamiast testu Cochrana stosuje się na ogół ▷ *test F*. Test Cochrana jest równoważny ▷ *testowi Hartleya*. Dla $k > 2$ i różnych rozmiarów prób można użyć ▷ *testu Bartletta*.

Test Cochrana-Coxa [**Cochran-Cox test**] Jest to test do sprawdzania hipotezy o równości średnich dwóch populacji o rozkładach normalnych i nieznanych wariancjach.

Model. $\mathbf{X}_1=(X_{11},\ldots,X_{1,n_1})$ i $\mathbf{X}_2=(X_{21},\ldots,X_{2,n_2})$ są dwiema niezależnymi próbami losowymi pochodzącymi z dwóch populacji generalnych o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ i $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$, przy czym wariancje σ_1^2 i σ_2^2 są nieznane.

Hipotezy: $H_0:\mu_1=\mu_2$; $H_1:\mu_1\neq\mu_2$.

Statystyka testowa: statystyka Cochrana-Coxa

$$C=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}},$$

przy czym $\overline{X}_1$ i $\overline{X}_2$ oraz S_1^2 i S_2^2 oznaczają odpowiednio średnie oraz wariancje z prób $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$. Przy założeniu H_0 rozkład statystyki C zależy od stosunku σ_1/σ_2, który nie jest znany, ale dla danych n_1 i n_2 można znaleźć przybliżoną wartość $c_{n_1,n_2}(p)$ kwantyla rzędu p rozkładu zmiennej C, a mianowicie

$$c_{n_1,n_2}(p)\cong\frac{\dfrac{s_1^2}{n_1}t_{n_1-1}(p)+\dfrac{s_2^2}{n_2}t_{n_2-1}(p)}{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}},$$

gdzie $t_\nu(p)$ oznacza kwantyl rzędu p rozkładu t Studenta $\mathcal{T}(\nu)$, a s_i^2 – wartość wariancji S_i^2 $(i=1,2)$ z próby $\mathbf{X}_i$.

Obszar krytyczny: $K=\{c:|c|>c_{n_1,n_2}(1-\alpha/2)\}$, gdzie c jest realizacją statystyki C, a α – poziomem istotności.

Test dla mediany ▷ *test znaków* (s. 276)

Test dla współczynnika korelacji [**test for correlation coefficient**] Na podstawie n niezależnych obserwacji $(x_i,y_i), i=1,2,\ldots,n$, cechy (X,Y) populacji generalnej mającej ⊳⊳ *rozkład normalny, dwuwymiarowy*, należy sprawdzić hipotezę dotyczącą wartości ⊳⊳ *współczynnika korelacji* ϱ zmiennych losowych X i Y.

Model. Niech (X,Y) będzie dwuwymiarowym wektorem losowym mającym dwuwymiarowy rozkład normalny $\mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$. Niech $((X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n))$ będzie próbą rozmiaru n z rozkładu wektora (X,Y).

Przypuśćmy, że należy sprawdzić hipotezę, że współczynnik korelacji ϱ zmiennych losowych X i Y wynosi zero, tzn. że zmienne X i Y nie są skorelowane.

Hipotezy: $H_0:\varrho=0$; $H_1:\varrho\neq 0$.

Statystyka testowa:

$$T=\frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\sqrt{n-2}, \tag{5.1}$$

gdzie R oznacza $\triangleright$ *współczynnik korelacji z próby* (s. 39). Statystyka ta ma przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 rozkład t Studenta $\mathcal{T}(n-2)$.
Obszar krytyczny: $K = \{t : |t| > t_{n-2}(1-\alpha/2)\}$, gdzie t jest wartością statystyki T, $t_{n-2}(1-\alpha/2)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ rozkładu $\mathcal{T}(n-2)$, a α oznacza poziom istotności.

Poniższa hipoteza określa ustaloną wartość (różną od zera) współczynnika korelacji zmiennych X i Y.
Hipotezy: $H_0 : \varrho = \varrho_0$ $(0 < |\varrho_0| < 1)$; $H_1 : \varrho \neq \varrho_0$.
Statystyka testowa:

$$Z = \left[U - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\varrho_0}{1-\varrho_0} - \frac{\varrho_0}{2(n-1)}\right]\sqrt{n-3},$$

gdzie U jest **statystyką Fishera [Fisher's statistic]**

$$U = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R}{1-R}.$$

Przy założeniu, że hipoteza H_0 jest prawdziwa, statystyka U ma przy $n \to \infty$ $\triangleright\!\!\triangleright$ *rozkład asymptotycznie normalny*

$$\mathcal{AN}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\varrho_0}{1-\varrho_0} + \frac{\varrho_0}{2(n-1)}, \frac{1}{n-3}\right).$$

Obszar krytyczny: $K = \{z : |z| > z(1-\alpha/2)\}$, gdzie z jest wartością statystyki Z, $z(1-\alpha/2)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$, a α oznacza poziom istotności.

Test dwumianowy $\triangleright$ *test dla prawdopodobieństwa* (s. 250)

Test F **[F-test]** *Testem F* nazywamy test, w którym statystyka testowa ma $\triangleright\!\!\triangleright$ *rozkład F*. Podstawowy test F stosowany jest do sprawdzania hipotezy o równości wariancji rozkładów normalnych dwóch populacji. Nazywany jest też **testem jednorodności dwóch wariancji [test for homogeneity of two variances]**. Test ten nosi również nazwę **testu Fishera [Fisher test]**.
Model. $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ i $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ są dwiema niezależnymi próbami z rozkładów odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ i $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.
Hipotezy: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$; $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$.
Statystyka testowa:

$$T = \frac{S_X^2}{S_Y^2},$$

gdzie S_X^2 i S_Y^2 oznacza wariancję odpowiednio z próby $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$:

$$S_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2, \quad S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2;$$

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

W przypadku, gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa, statystyka T ma rozkład F Snedecora $\mathcal{F}(m-1, n-1)$.
Obszar krytyczny:

$$K = \{t : t < F_{m-1,n-1}(\alpha/2) \quad \text{lub} \quad t > F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2)\},$$

gdzie $F_{m-1,n-1}(q)$ oznacza kwantyl rzędu q rozkładu $\mathcal{F}(m-1, n-1)$, a α jest poziomem istotności. Przy obliczeniu wartości t statystyki T należy jako licznik przyjąć większą z wartości s_X^2 i s_Y^2, dokonując w razie potrzeby zmiany nazwy zmiennej X na Y tak, aby $t > 1$.

Dla hipotezy alternatywnej $H_1^L : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ obszar krytyczny ma postać $K^L = \{t : t < F_{m-1,n-1}(\alpha)\}$, a dla hipotezy alternatywnej $H_1^R : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ obszar krytyczny ma postać $K^R = \{t : t > F_{m-1,n-1}(1-\alpha)\}$.

Test F jest podstawowym narzędziem analizy wariancji (▷ *analiza wariancji*[1]*; klasyfikacja pojedyncza*, ▷ *analiza wariancji*[2]*; klasyfikacja podwójna*), w szczególności analizy wariancji dla wielokrotnej regresji liniowej (▷ *testy dla współczynników wielokrotnej regresji liniowej*).

Test Fishera ▷ *test F*

Test Hartleya **[Hartley test]** Jest to test do weryfikowania hipotezy o równości wariancji $\sigma_i^2, i = 1, \ldots, k$, dla $k \geq 2$ populacji o rozkładach normalnych. Jest więc **testem jednorodności wielu wariancji [test for homogeneity of several variances]**.
Model. $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, \ldots, X_{i,n})$, $i = 1, \ldots, k$, są k niezależnymi próbami o tym samym rozmiarze n z rozkładów normalnych $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.
Hipotezy: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma^2$;
H_1: $\sigma_i^2 \neq \sigma^2$ dla co najmniej jednego i.
Statystyka testowa:

$$T = \frac{\max\{S_1^2, \ldots, S_k^2\}}{\min\{S_1^2, \ldots, S_k^2\}},$$

gdzie S_i^2 $(i = 1, \ldots, k)$ oznacza wariancję z próby $\mathbf{X}_i$.
Obszar krytyczny: $K = \{t : t > H_{k,n-1}(1-\alpha)\}$, gdzie $H_{k,n-1}(1-\alpha)$ oznacza kwantyl rzędu $1-\alpha$ rozkładu statystyki T (kwantyle tego rozkładu można odczytać z tablic podanych w [**?**], [68]), a α jest poziomem istotności.

Z powodu dużej wrażliwości tego testu na odchylenie od rozkładu normalnego, duża wartość statystyki T może wskazywać zarówno na nierówne wariancje jak i na odstępstwo od rozkładu normalnego.

Test jednorodności dwóch wariancji ▷ *test F*

Test jednorodności wielu wariancji ▷ *test Bartletta*, ▷ *test Cochrana*, ▷ *test Hartleya*

Test liniowości Fishera [**Fisher test of linearity**] Zgodnie z modelem liniowym ▷ *analizy regresji* (s. 53) zakłada się, że $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi}$, $i = 1, \dots, n$, tzn. wartość y zmiennej zależnej zależy liniowo od zmiennych objaśniających $x_1, \dots, x_p$. Do sprawdzania tego założenia służy *test liniowości Fishera*.

Model. Niech $Y_1, \dots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$, i niech $Y_{i1}, \dots, Y_{i,m_i}$ oznacza próbę rozmiaru m_i z rozkładu zmiennej Y_i.

Hipoteza $H_0 : E(Y_i) = \mu_i := \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi}, \quad i = 1, \dots, n.$

Statystyka testowa:

$$F = \frac{(m-n)S_2}{(n-p-1)S_1},$$

gdzie $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$,

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_{1i} + \dots + \widehat{\beta}_p x_{pi} - \overline{Y}_i)^2,$$

przy czym $\overline{Y}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$ oraz $\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \dots, \widehat{\beta}_p$ są współczynnikami regresji z próby. Przy hipotezie H_0 statystyka F ma rozkład $\mathcal{F}(n-p-1, m-n)$.

Obszar krytyczny: $K = \{f : f > F_{n-p-1,m-n}(1-\alpha)\}$, gdzie f jest wartością statystyki F, $F_{n-p-1,m-n}(1-\alpha)$ oznacza kwantyl rzędu $1-\alpha$ rozkładu $\mathcal{F}(n-p-1, m-n)$, a α jest poziomem istotności.

Test t [**t-test**] *Testami t* nazywamy testy, w których statystyka testowa ma ⊳⊳ *rozkład t* (dokładny lub asymptotyczny). Podstawowy test t stosowany jest do sprawdzania hipotezy dotyczącej wartości oczekiwanej rozkładu normalnego, gdy wariancja jest nieznana. Nazwa *test t* jest skrótem nazwy **test t Studenta** [**Student t test**].

A. Test t dla jednej próby (zmiennej) [**t-test for a single sample**] .

Model. $(X_1, \dots, X_n)$ jest próbą losową z populacji generalnej, której cecha X ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$; wariancja σ^2 jest nieznana.

Hipotezy: $H_0 : \mu = \mu_0$; $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{S},$$

gdzie $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$. Gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa, statystyka T ma rozkład t Studenta $\mathcal{T}(n-1)$.

Obszar krytyczny: $K = \{t : |t| > t_{n-1}(1-\alpha/2)\}$, gdzie t jest wartością statystyki T, $t_{n-1}(1-\alpha/2)$ oznacza kwantyl rzędu $1-\alpha/2$ rozkładu $\mathcal{T}(n-1)$, a α jest poziomem istotności. Oczywiście, obszar K można zapisać w postaci $K = \{t : t > t_{n-1}(1-\alpha/2) \quad \text{lub} \quad t < t_{n-1}(\alpha/2)\}$.

Jeżeli wariancja σ^2 jest znana (co rzadko zdarza się w praktyce), do sprawdzenia hipotezy H_0 wykorzystuje się statystykę $Z = \sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)/\sigma$, która przy założeniu H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$ ($\triangleright$ *test Z*).

W przypadku, gdy dopuszcza się, że rozkład cechy X populacji generalnej może być inny niż normalny, do sprawdzenia hipotezy H_0 używa się statystyki testowej $Z = \sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)/s$ opartej na próbie, której rozmiar n jest duży (s jest wartością odchylenia standardowego S z próby). Wtedy, przy założeniu H_0 statystyka Z ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(0,1)$ ($\triangleright$ *test z*). Najlepiej jest, jeśli test może być przeprowadzony w oparciu o próbę o dużym rozmiarze. Ale często, ze względu na duży koszt każdej obserwacji (np. przy wierceniach geologicznych) lub z tego powodu, że obserwacje mogą dotyczyć rzadkich zjawisk (np. wypadków nuklearnych), nie jest możliwe zastosowanie testu z. W przypadku niewielkiej liczby obserwacji należy rozważyc możliwość zastosowania testu t opartego na statystyce T.

Test t jest testem JNMN i testem JNM niezmienniczym do sprawdzenia hipotezy $H_0 : \mu \leq \mu_0$ przeciwko hipotezie $H_1 : \mu > \mu_0$. Jest testem JNMN oraz testem IW do sprawdzenia hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$ przeciwko hipotezie $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

B. Test t dla prób (zmiennych) niepowiązanych [**t-test for independent samples**].

<u>*Model*</u>. Niech $\mathbf{X}_1{=}(X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1})$ i $\mathbf{X}_2{=}(X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2})$ będą dwiema niezależnymi próbami losowymi z dwóch populacji generalnych o rozkładach normalnych, odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, gdzie wariancja σ^2 jest nieznana (zakłada się, że wariancje obu populacji są równe, tzn. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$).

<u>*Hipotezy*</u>: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

<u>*Statystyka testowa*</u>:

$$T(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \frac{\overline{X}_2 - \overline{X}_1}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$
$$= \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}},$$

przy czym $\overline{X}_1$ i $\overline{X}_2$ oraz S_1^2 i S_2^2 oznaczają odpowiednio średnie oraz wariancje z prób $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$, a

$$S_p^2 = S_p^2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1,i} - \overline{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_1}(X_{2,i} - \overline{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$
$$= \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

jest średnią ważoną estymatorów wariancji σ^2, reprezentowanych przez wariancje z prób $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$. Estymator S_p^2 nazywamy *zgrupowanym estymatorem wariancji* [**pooled variance estimator**]. Przy hipotezie H_0 statystyka T ma rozkład t Studenta $\mathcal{T}(n_1 + n_2 - 2)$. Statystyka $T(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ nazywa się *statystyką t Studenta dla dwóch prób*, a test do sprawdzenia hipotezy H_0 nazywa się *dwustronnym testem t Studenta dla dwóch prób*.

Obszar krytyczny: $K = \{t : |t| > t_{n_1+n_2-2}(1 - \alpha/2)\}$, gdzie t jest realizacją statystyki T, $t_{n_1+n_2-2}(1-\alpha/2)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ rozkładu $\mathcal{T}(n_1 + n_2 - 2)$, a α – poziomem istotności.

Dwustronny test t Studenta jest testem JNMN.

Dla problemu testowania hipotezy $H_0^R : \mu_1 \geq \mu_2$ przeciwko $H_1^R : \mu_1 < \mu_2$ otrzymuje się test JNM niezmienniczy, w którym statystyka testowa ma ⊳⊳ *rozkład t, niecentralny*.

Jeśli wariancje σ_1^2 i σ_2^2 są znane (niekoniecznie równe), do sprawdzenia hipotezy H_0 wykorzystuje się statystykę

$$Z = \frac{\overline{X}_2 - \overline{X}_1}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

która przy hipotezie H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$ (⊳ *test Z*).

W przypadku, gdy próby $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$ pochodzą z populacji o rozkładach normalnych lub innych, ale o skończonych wariancjach σ_1^2 i σ_2^2, które są nieznane, przy czym rozmiary n_1 i n_2 prób są duże, do sprawdzenia hipotezy H_0 używa się testu opartego na statystyce

$$\widetilde{Z} = \frac{\overline{X}_2 - \overline{X}_1}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

(s_i^2 jest realizacją wariancji S_i^2 $(i = 1, 2)$ z próby). Przy hipotezie H_0 statystyka Z ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(0,1)$ (⊳ *test z*).

Założenie o równości wariancji $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ sprawdza się używając ⊳ *testu F*. Jeśli $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, lub test F odrzuca hipotezę o równości wariancji, to test t nie może być zastosowany. Przy niedużych rozmiarach prób można wtedy zastosować do weryfikacji hipotezy H_0 ⊳ *test Cochrana-Coxa*.

C. Test t dla prób (zmiennych) powiązanych (zależnych) [**t-test for matched-pairs samples, t-test for dependent samples, paired t-test**].

Model. Niech $(X_i, Y_i), i = 1, \ldots, n$, będą niezależnymi obserwacjami zmiennej losowej (X, Y); niech F_D oznacza dystrybuantę zmiennej losowej $D = Y - X$. Zakłada się, że F_D jest dystrybuantą rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$, przy czym wariancja σ_D^2 jest nieznana. Należy sprawdzić hipotezę o zerowej wartości oczekiwanej μ_D, która równoważna jest hipotezie o równości wartości oczekiwanych μ_X i μ_Y w obu populacjach o cechach odpowiednio X i Y.

Hipotezy: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$;

$H_1 : \mu_X < \mu_Y$.

<u>*Statystyka testowa*</u>:

$$T = \frac{\sqrt{n}\,\overline{D}}{S_D},$$

gdzie $\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$, $D_i = Y_i - X_i$, $S_D = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2}$. Przy założeniu, że hipoteza H_0 jest prawdziwa, statystyka T ma rozkład $\mathcal{T}(n-1)$.
<u>*Obszar krytyczny*</u>: $K = \{t : t < t_{n-1}(\alpha)\}$, gdzie t jest realizacją statystyki T, $t_{n-1}(\alpha)$ jest kwantylem rzędu α rozkładu $\mathcal{T}(n-1)$, a α – poziomem istotności.

PRZYKŁAD **5.1** Przed wykonaniem określonego zabiegu na n elementach próby dokonujemy pomiarów $x_1, \ldots, x_n$ pewnej cechy X, a następnie po dokonanym zabiegu mierzymy tę samą cechę otrzymując, w tej samej kolejności elementów, wyniki $y_1, \ldots, y_n$. Hipoteza H_0 określa równość wartości średnich μ_X i μ_Y badanej cechy populacji przed i po zabiegu. □

Test t Studenta ▷ *test t*

Test T-kwadrat Hotellinga [**Hotelling T^2 test**] Jest to test, w którym statystyka testowa ma ⧐ *rozkład T^2 Hotellinga*. Służy do sprawdzania hipotezy dotyczącej wektora wartości oczekiwanych wielowymiarowego rozkładu normalnego.
<u>*Model*</u>. Wektor losowy $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)^T$ ma k-wymiarowy rozkład normalny (⧐ *rozkład normalny, wielowymiarowy*) $\mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ o nieznanym wektorze wartości oczekiwanych $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)^T$ i nieznanej macierzy kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$. Niech $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)^T$, gdzie $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ik})^T, i = 1, \ldots, n$, oznacza próbę rozmiaru n z rozkładu $\mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.
<u>*Hipotezy*</u>: $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$; $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$.
<u>*Statystyka testowa*</u> – **statystyka T^2 Hotellinga** [**Hotelling T^2 statistic**]:

$$T^2 = n(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0),$$

gdzie $\overline{\mathbf{X}}$ i $\mathbf{S}$ oznaczają odpowiednio średnią i ▷ *macierz kowariancji z próby* (s. 5) $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)^T$.

Macierz odwrotna $\mathbf{S}^{-1}$ istnieje z prawdopodobieństwem 1 wtedy i tylko wtedy, gdy z prawdopodobieństwem 1 wektory $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ nie leżą na $(k-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyźnie.

Przy założeniu H_0 statystyka T^2 ma rozkład T^2 Hotellinga $\mathcal{HT}^2(n-1, k)$, a statystyka

$$V = \frac{n-k}{(n-1)k}T^2$$

ma rozkład F Snedecora $\mathcal{F}(k, n-k)$.
<u>*Obszar krytyczny*</u>: $K = \{v : v > F_{k,n-k}(1-\alpha)\}$, gdzie v jest wartością statystyki V, a $F_{k,n-k}(1-\alpha)$ oznacza kwantyl rzędu $1-\alpha$ rozkładu $\mathcal{F}(k, n-k)$.

Statystyka testowa T^2 jest uogólnieniem kwadratu odpowiedniej statystyki testowej $\triangleright$ *testu t* na przypadek wielowymiarowego rozkładu normalnego.

W przypadku, gdy macierz kowariancji $\mathbf{\Sigma}$ rozkładu $\mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ wektora $\mathbf{X}$ jest znana (co w praktyce bardzo rzadko się zdarza) oraz jest macierzą nieosobliwą, zamiast powyżej opisanej statystyki stosuje się statystykę $T = n(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$, która przy hipotezie H_0 ma rozkład $\chi^2(k)$. Obszar krytyczny ma w tym przypadku postać: $K = \{t : t > \chi^2_k(1-\alpha)\}$, gdzie $\chi^2_k(1-\alpha)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu $\chi^2(k)$.

Test z [**z-test**] *Testem z* nazywamy test oparty na statystyce, której rozkładem granicznym, gdy rozmiar próby $n \to \infty$, jest rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Test ten służy do sprawdzania hipotezy dotyczącej średniej rozkładu o nieznanej wariancji.

A. Test z dla jednej próby (zmiennej) [**z-test for a single sample**].

Model. $(X_1, \dots, X_n)$ oznacza próbę losową z populacji generalnej, której cecha X ma rozkład o wartości oczekiwanej μ i skończonej wariancji σ^2; wariancja σ^2 jest nieznana; rozmiar n próby jest duży.

Hipotezy: $H_0 : \mu = \mu_0$; $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Statystyka testowa: [**normal deviate test statistic**]

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{s},$$

gdzie s jest wartością odchylenia standardowego z próby

$$S = \sqrt{\tfrac{1}{n-1}\textstyle\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}.$$

Gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa, statystyka Z ma graniczny rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Obszar krytyczny: $K = \{z : |z| > z(1-\alpha/2)\}$, gdzie z jest wartością statystyki Z, $z(1-\alpha/2)$ oznacza kwantyl rzędu $1-\alpha/2$ rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$, a α jest poziomem istotności.

B. Test z dla dwóch prób [**z-test for two samples**].

Model. Niech $\mathbf{X_1}=(X_{1,1}, \dots, X_{1,n_1})$ i $\mathbf{X_2}=(X_{2,1}, \dots, X_{2,n_2})$ będą dwiema niezależnymi próbami losowymi z dwóch populacji generalnych o wartościach oczekiwanych i skończonych wariancjach, odpowiednio μ_1, μ_2 i σ_1^2, σ_2^2, przy czym wariancje σ_1^2 i σ_2^2 są nieznane. Zakłada się, że rozmiary prób n_1 i n_2 są duże.

Hipotezy: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Statystyka testowa: [**normal deviate test statistic**]

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}},$$

gdzie $\overline{X}_i$ $(i = 1,2)$ oznacza średnią z próby $\mathbf{X_i}$, a s_i^2 jest realizacją wariancji S_i^2 z tej próby. Przy założeniu H_0 statystyka Z ma graniczny rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Obszar krytyczny wyznacza się tak samo jak w przypadku A testu z dla jednej próby.

Test Z [**Z-test**] *Testem Z* nazywamy test, którego statystyka testowa ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$. Stosowany jest do sprawdzania hipotezy dotyczącej średniej rozkładu normalnego o znanej wariancji.

A. Test Z dla jednej próby (zmiennej) [**Z-test for a single sample**].
Model. $(X_1,\ldots,X_n)$ oznacza próbę losową z populacji generalnej, której cecha X ma rozkład $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$; wariancja σ^2 jest znana.
Hipotezy: $H_0:\mu=\mu_0$; $H_1:\mu\neq\mu_0$.
Statystyka testowa:

$$Z=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma},$$

gdzie $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa, statystyka Z ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.
Obszar krytyczny: $K=\{z:|z|>z(1-\alpha/2)\}$, gdzie z jest wartością statystyki Z, $z(1-\alpha/2)$ oznacza kwantyl rzędu $1-\alpha/2$ rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$, a α jest poziomem istotności.

B. Test Z dla dwóch prób [**Z-test for two samples**].
Model. Niech $\mathbf{X_1}=(X_{1,1},\ldots,X_{1,n_1})$ i $\mathbf{X_2}=(X_{2,1},\ldots,X_{2,n_2})$ będą dwiema niezależnymi próbami losowymi z dwóch populacji generalnych o rozkładach normalnych, odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ i $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$, przy czym wariancje σ_1^2 i σ_2^2 są znane.
Hipotezy: $H_0:\mu_1=\mu_2$; $H_1:\mu_1\neq\mu_2$.
Statystyka testowa:

$$Z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

gdzie $\overline{X}_1$ i $\overline{X}_2$ oznaczają średnie odpowiednio z próby $\mathbf{X_1}$ i $\mathbf{X_2}$. Przy założeniu H_0 statystyka Z posiada rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.
Obszar krytyczny wyznacza się tak samo jak w przypadku A testu Z dla jednej próby.

Testy dla modelu proporcjonalnych hazardów $\triangleright$ *model proporcjonalnych hazardów* (s. 141)

Testy dla modelu prostej regresji liniowej [**tests for a simple linear regression model**]

1. Następujące zadanie należy do podstawowych w zakresie sprawdzania hipotez dotyczących współczynników liniowej funkcji regresji. Na podstawie n niezależnych obserwacji $(x_i,y_i), i=1,2,\ldots,n$, cechy (X,Y) populacji generalnej mającej $\triangleright\!\!\triangleright$ *rozkład normalny, dwuwymiarowy*, należy sprawdzić hipotezę, że współczynnik β_1 liniowej funkcji regresji $E(Y|X=x)=h_Y(x)=\beta_0+\beta_1x$ ($\triangleright$ *regresja* (s. 160), wzór (3.116)) w badanej populacji ma określoną wartość.