ELEMENTY ANALIZY WEKTOROWEJ

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ELEMENTY ANALIZY WEKTOROWEJ

Teoria, przykłady, zadania

Wydanie siódme powiększone

GiS

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2024

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–67234–11–5

Wydanie VII powiększone, Wrocław 2024
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp

Książka jest przeznaczona dla studentów uczelni technicznych. Mogą z niej korzystać także studenci wydziałów fizyki i matematyki uniwersytetów. W podręczniku omówiono zagadnienia dotyczące całek krzywoliniowych i powierzchniowych, zorientowanych oraz niezorientowanych. Ponadto, przedstawiono ich zastosowania w fizyce i technice.

Materiał teoretyczny w podręczniku jest ilustrowany przykładami rozwiązanymi „krok po kroku". Pozwalają one Czytelnikowi lepiej przyswoić sobie materiał. Mają one także służyć, jako wzorzec przy rozwiązywaniu zadań, które wraz z odpowiedziami umieszczono po każdym przykładzie. Ponadto, podręcznik zawiera rysunki ilustrujące omawiane zagadnienia. Ułatwia to lepsze zrozumienie materiału.

W nowym wydaniu podręcznika zmieniliśmy układ materiału. Między innymi dodaliśmy omówienia zawartości rozdziałów, dołączyliśmy kilkanaście nowych przykładów wraz z rozwiązaniami oraz wiele zadań z odpowiedziami. Dołączono także nowy rozdział zawierający podstawowe metody obliczania całek pojedynczych, podwójnych i potrójnych. Ponadto, umieściliśmy nowe rysunki oraz poprawiliśmy zauważone błędy i usterki.

Autorzy dziękują Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za uwagi o wcześniejszych wydaniach. Szczególne podziękowania składamy Pani dr Jolancie Długosz oraz Panom doc. dr. Sławomirowi Krzemińskiemu i prof. dr. hab. Januszowi Mierczyńskiemu za wskazanie błędów w poprzednich wydaniach.

Marian Gewert *Zbigniew Skoczylas*

1. Całki krzywoliniowe niezorientowane

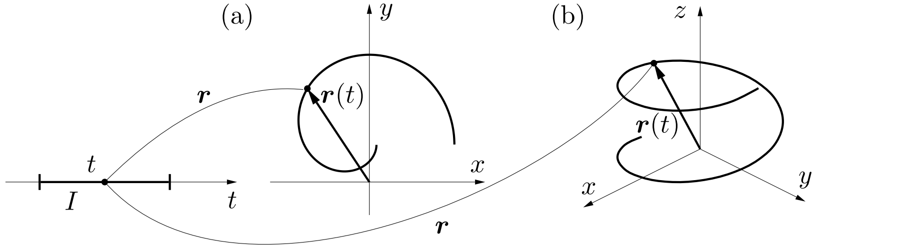
W początkowym rozdziale książki omawiamy całki krzywoliniowe niezorientowane. Najpierw wprowadzamy pojęcia potrzebne do określenia tych całek. Podajemy określenie łuku oraz parametryzacje najczęściej spotykanych łuków. Następnie definiujemy długość łuku oraz przytaczamy wzór do wyznaczania tej wielkości. W kolejnej części rozdziału podajemy określenie całki krzywoliniowej niezorientowanej, wymieniamy własności oraz przytaczamy wzory do jej obliczania za pomocą całki oznaczonej. Na końcu rozdziału omawiamy zastosowania całek nieoznaczonych w geometrii oraz w mechanice.

1.1 Łuki

Definicja 1.1. *(funkcja wektorowa jednej zmiennej)*
Niech I będzie podzbiorem $\mathbb{R}$. *Funkcją wektorową* jednej zmiennej na płaszczyźnie lub w przestrzeni nazywamy odpowiednio odwzorowanie $\boldsymbol{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lub $\boldsymbol{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Odwzorowanie takie zapisujemy w postaci

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

gdzie funkcje x, y i z są określone na I.



Rys. 1.1. Funkcja wektorowa jednej zmiennej: (a) na płaszczyźnie; (b) w przestrzeni

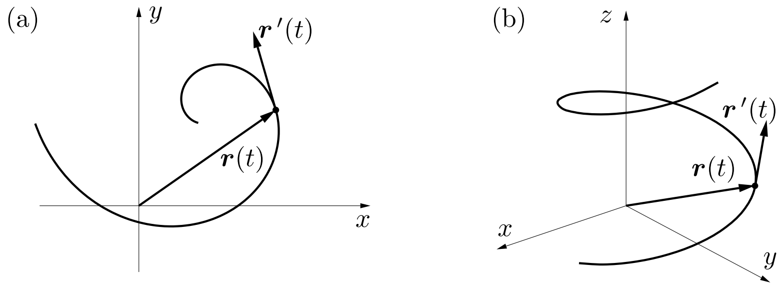
Mówimy, że funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}$ jest *różnowartościowa*, jeżeli dla dowolnych $t_1, t_2 \in I$ prawdziwa jest implikacja

$$t_1 \neq t_2 \implies \boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2).$$

Jeżeli funkcje x, y lub x, y, z są ciągłe, to mówimy, że funkcja $\boldsymbol{r}$ jest *ciągła*. Gdy funkcje te mają pochodne, to mówimy, że funkcja $\boldsymbol{r}$ jest *różniczkowalna*. Pochodną takiej funkcji określamy wzorem:

$$\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) \text{ lub } \boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Jeżeli dodatkowo pochodne są ciągłe, to mówimy, że funkcja $\boldsymbol{r}$ jest *różniczkowalna w sposób ciągły*.



Rys. 1.2. Pochodna funkcji wektorowej: (a) na płaszczyźnie; (b) w przestrzeni

Uwaga. Funkcję wektorową $\boldsymbol{r}(t)$ używa się w fizyce do opisu położenia na płaszczyźnie lub w przestrzeni punktu materialnego w chwili t. Wtedy pochodna $\boldsymbol{r}'(t)$, czyli prędkość, jest wektorem stycznym do trajektorii punktu w chwili t.

Przykład 1.2. Obliczyć pochodne funkcji wektorowych:

(a) $\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t, t - \sin t)$; (b) $\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2, \ln t\right)$;

(c) $\boldsymbol{r}(t) = \left(t, \dfrac{t}{t+1}, \sqrt{2-t}\right)$; (d) $\boldsymbol{r}(t) = \left(\sin^2 t, \cos^3 t, e^{-t}\right)$.

Rozwiązanie.

(a) Funkcje $\cos 2t$, $t - \sin t$ są różniczkowane na $\mathbb{R}$. Tak więc, funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t, t - \sin t)$ jest również różniczkowalna na $\mathbb{R}$. Zatem z definicji pochodnej funkcji wektorowej, mamy

$$\boldsymbol{r}'(t) = \left((\cos 2t)', (t - \sin t)'\right) = (-2\sin 2t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Funkcja t^2 jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$, a funkcja $\ln t$ na przedziale $(0, \infty)$. Zatem, funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}(t) = (t^2, \ln t)$ jest różniczkowalna na $(0, \infty)$.

Więc, z definicji pochodnej funkcji wektorowej, mamy

$$\boldsymbol{r}'(t) = \left(\left(t^2\right)', (\ln t)'\right) = \left(2t, \frac{1}{t}\right), \quad t \in (0, \infty).$$

(c) Funkcja t jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$, a funkcja $\dfrac{t}{1+t}$ na przedziałach $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$. Z kolei funkcja $\sqrt{2-t}$ jest różniczkowalna na przedziale $(-\infty, 2)$. Więc funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}(t) = \left(t, \dfrac{t}{t+1}, \sqrt{2-t}\right)$ jest różniczkowalna na zbiorze $(-\infty, -1) \cup (-1, 2)$. Zatem, z definicji pochodnej funkcji wektorowej, otrzymamy

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'(t) &= \left((t)', \left(\frac{t}{1+t}\right)', \left(\sqrt{2-t}\right)'\right)\\ &= \left(1, \frac{1}{(1+t)^2}, \frac{-1}{2\sqrt{2-t}}\right), \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2).\end{aligned}$$

(d) Funkcje $\sin^2 t$, $\cos^3 t$, e^{-t} są różniczkowalne na $\mathbb{R}$. Stąd funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}(t) = \left(\sin^2 t, \cos^3 t, e^{-t}\right)$ jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$. Zatem z definicji pochodnej funkcji wektorowej, otrzymamy

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'(t) &= \left(\left(\sin^2 t\right)', \left(\cos^3 t\right)', \left(e^{-t}\right)'\right)\\ &= \left(2\sin t\cos t, -3\cos^2 t\sin t, -e^{-t}\right), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Zadanie 1.3. Obliczyć pochodne funkcji wektorowych:

(a) $\boldsymbol{r}(t) = (t\sin t, \ln t)$; (b) $\boldsymbol{r}(t) = (3-2t, -4t)$;

(c) $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t, 2\cos t)$; (d) $\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{t-1}, t^{-2}\right)$;

(e) $\boldsymbol{r}(t) = (1+3t, -1+t, 2t)$; (f) $\boldsymbol{r}(t) = (3t, 3\cos t, 2)$.

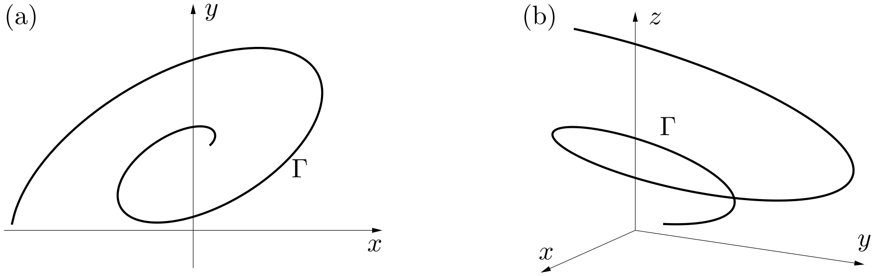
Odpowiedzi. (a) $\boldsymbol{r}'(t) = \left(\sin t + t\cos t, \dfrac{1}{t}\right)$, $t > 0$; (b) $\boldsymbol{r}'(t) = (-2, -4)$, $t \in \mathbb{R}$; (c) $\boldsymbol{r}'(t) = (2\cos t, -2\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$; (d) $\boldsymbol{r}'(t) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}, -2t^{-3}\right)$, $t \in (1, \infty)$; (e) $\boldsymbol{r}'(t) = (3, 1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$; (f) $\boldsymbol{r}'(t) = (3, -3\sin t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Definicja 1.4. *(łuk gładki)*

Zbiór Γ na płaszczyźnie lub w przestrzeni nazywamy *łukiem gładkim*, jeżeli istnieje funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}$ określona na przedziale domkniętym I taka, że

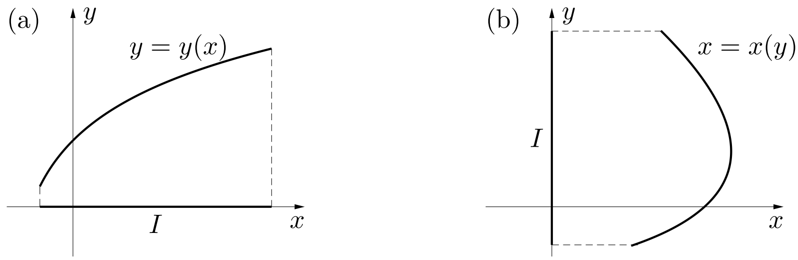
$$\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t) : t \in I\}.$$

Przy czym funkcja $\boldsymbol{r}$ jest różnowartościowa i różniczkowalna w sposób ciągły na I, a w jego wnętrzu spełnia warunek $\boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. Funkcję $\boldsymbol{r}$ nazywamy *parametryzacją łuku* Γ.



Rys. 1.3. Łuk gładki: (a) na płaszczyźnie; (b) w przestrzeni

Uwaga. Łuk może mieć wiele parametryzacji. Wykres funkcji $y = y(x)$, $x \in I$, różniczkowalnej w sposób ciągły na przedziale I, jest łukiem gładkim na płaszczyźnie, a funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}(x) = (x, y(x))$, $x \in I$, jest jego parametryzacją. Analogiczna uwaga dotyczy wykresu funkcji $x = x(y)$, $y \in I$, różniczkowalnej w sposób ciągły na przedziale I. Funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}(y) = (x(y), y)$, $y \in I$, jest jego parametryzacją.



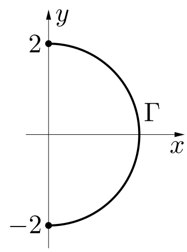
Rys. 1.4. Łuk, który jest wykresem funkcji: (a) $y = y(x)$; (b) $x = x(y)$

Przykład 1.5. Uzasadnić, że podane funkcje wektorowe są parametryzacjami półokręgu

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4,\ x \geqslant 0\right\}:$$

(a) $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t, -2\cos t)$, $t \in [0, \pi]$;

(b) $\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{4 - t^2}, t\right)$, $t \in [-2, 2]$.



Rozwiązanie.

(a) Ponieważ $x = 2\sin t$, $y = -2\cos t$, więc

$$x^2(t) + y^2(t) = (2\sin t)^2 + (-2\cos t)^2 = 4\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) = 4.$$

Ponadto, $x(t) = 2\sin t \geqslant 0$ dla $t \in [0, \pi]$ oraz

$$\begin{aligned} x(0) &= 2\sin 0 = 0, \quad & y(0) &= -2\cos 0 = -2, \\ x(\pi) &= 2\sin \pi = 0, \quad & y(\pi) &= -2\cos \pi = 2. \end{aligned}$$

Zatem, wobec ciągłości funkcji wektorowej $\boldsymbol{r}(t)$, mamy

$$\Gamma = \{(2\sin t, -2\cos t) : t \in [0, \pi]\}.$$

(b) Ponieważ $x = \sqrt{4 - t^2}$, $y = t$, więc

$$x^2(t) + y^2(t) = \left(\sqrt{4 - t^2}\right)^2 + t^2 = 4 - t^2 + t^2 = 4.$$

Ponadto, $x(t) = \sqrt{4 - t^2} \geqslant 0$ dla $t \in [-2, 2]$ oraz

$$\begin{aligned} x(-2) &= \sqrt{4 - (-2)^2} = 0, \quad & y(-2) &= -2, \\ x(2) &= \sqrt{4 - 2^2} = 0, \quad & y(2) &= 2. \end{aligned}$$

Zatem, wobec ciągłości funkcji wektorowej $\boldsymbol{r}(t)$, mamy

$$\Gamma = \left\{\left(\sqrt{4 - t^2}, t\right) : t \in [-2, 2]\right\}.$$

Zadanie 1.6. Sprawdzić, że podane funkcje wektorowe są parametryzacją odcinka Γ o końcach $(1, 2, -1)$, $(0, 3, 2)$:

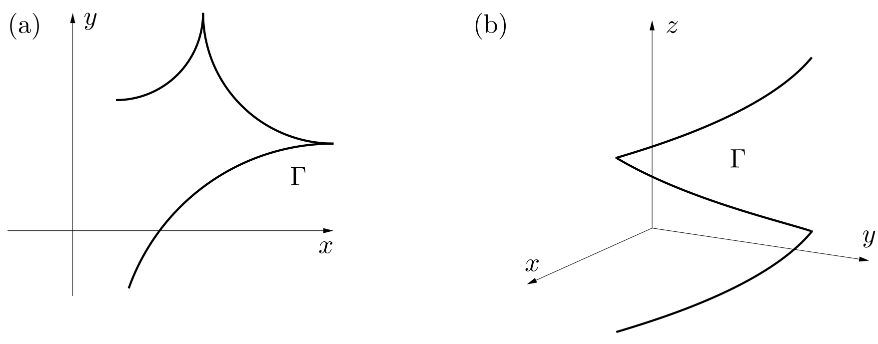
(a) $\boldsymbol{r}(t) = (1 - t, 2 + t, -1 + 3t)$, $t \in [0, 1]$;

(b) $\boldsymbol{r}(t) = \left(1 - \ln t, 2 + \ln t, -1 + \ln t^3\right)$, $t \in [1, e]$;

(c) $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, 3 - \cos t, 2 - 3\cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

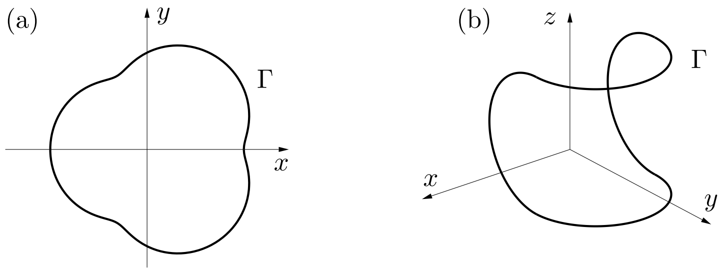
Definicja 1.7. *(łuk kawałkami gładki)*

Łuk, który można podzielić na skończoną liczbę łuków gładkich, nazywamy *łukiem kawałkami gładkim.*



Rys. 1.5. Łuk kawałkami gładki: (a) na płaszczyźnie; (b) w przestrzeni

Jeżeli parametryzacja $\boldsymbol{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, łuku spełnia równość $\boldsymbol{r}(\alpha) = \boldsymbol{r}(\beta)$, to mówimy, że *łuk jest zamknięty.*



Rys. 1.6. Łuk zamknięty: (a) na płaszczyźnie; (b) w przestrzeni

Równania parametryczne ważniejszych łuków

● Odcinek o początku $\boldsymbol{r}_1$ i końcu $\boldsymbol{r}_2$ ma równanie parametryczne:

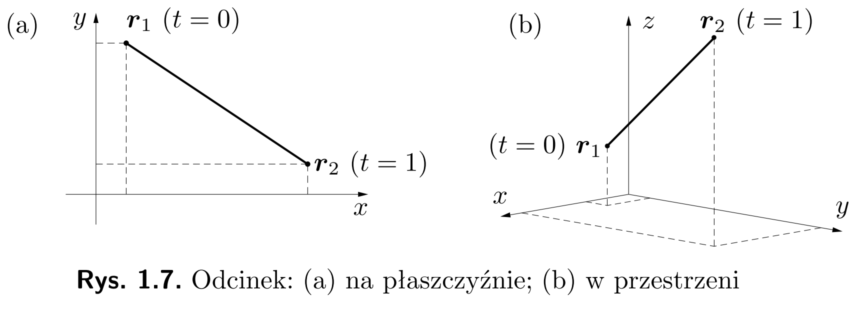
$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\, t, \quad \text{gdzie } t \in [0, 1].$$

Na płaszczyźnie dla $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2)$ równanie przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(x_1 + (x_2 - x_1)\, t,\ y_1 + (y_2 - y_1)\, t\right), \quad \text{gdzie } t \in [0, 1],$$

a w przestrzeni dla $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ – postać:

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(x_1 + (x_2 - x_1)\, t,\ y_1 + (y_2 - y_1)\, t,\ z_1 + (z_2 - z_1)\, t\right), \quad \text{gdzie } t \in [0, 1].$$



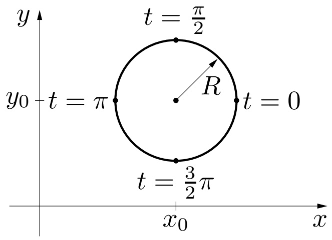
Rys. 1.7. Odcinek: (a) na płaszczyźnie; (b) w przestrzeni

● Okrąg o środku $S = (x_0, y_0)$ i promieniu $R > 0$ ma równanie parametryczne:

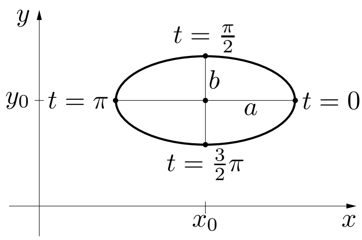
$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + R\cos t,\ y_0 + R\sin t)\,, \quad \text{gdzie } t \in [0, 2\pi].$$

● Elipsa o środku $S = (x_0, y_0)$ i półosiach a, $b > 0$ ma równanie parametryczne:

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + a\cos t,\ y_0 + b\sin t)\,, \quad \text{gdzie } t \in [0, 2\pi].$$



Rys. 1.8. Okrąg



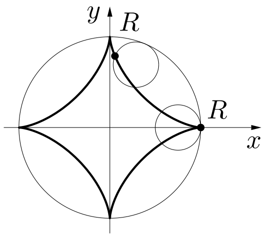
Rys. 1.9. Elipsa

- Asteroida – krzywa zakreślona przez punkt okręgu o promieniu $R/4$ ($R > 0$), toczącego się bez poślizgu po wewnętrznej stronie okręgu o promieniu R – ma równanie parametryczne:

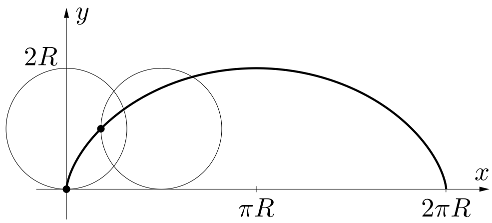
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(R\cos^3 t,\ R\sin^3 t\right), \quad \text{gdzie } t \in [0, 2\pi].$$

- Cykloida – krzywa zakreślona przez punkt okręgu o promieniu R ($R > 0$), toczącego się bez poślizgu po prostej – ma równanie parametryczne:

$$\boldsymbol{r}(t) = (R(t - \sin t),\ R(1 - \cos t)), \quad \text{gdzie } t \in [0, 2\pi].$$



Rys. 1.10. Asteroida

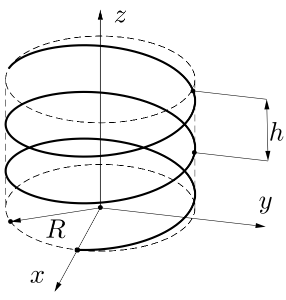


Rys. 1.11. Cykloida

- Linia śrubowa o skoku h, nawinięta na walec $x^2 + y^2 = R^2$, ma równanie parametryczne:

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(R\cos t,\ R\sin t,\ \frac{h}{2\pi}t\right),$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$. Jeden zwój linii śrubowej otrzymamy, gdy $t \in [0, 2\pi]$.



Rys. 1.12. Linia śrubowa

Zadanie 1.8. Naszkicować łuki o parametryzacjach:

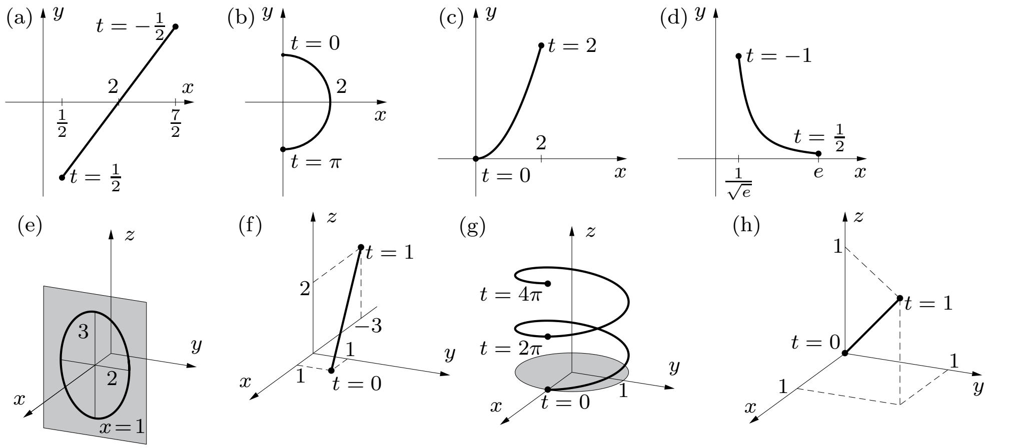
(a) $\boldsymbol{r}(t) = (2-3t, -4t)$, $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; (b) $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t, 2\cos t)$, $t \in [0, \pi]$;

(c) $\boldsymbol{r}(t) = \left(t, t^2\right)$, $t \in [0, 2]$; (d) $\boldsymbol{r}(t) = \left(e^{-t}, e^{2t}\right)$, $t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$;

(e) $\boldsymbol{r}(t) = (1, 2\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$; (f) $\boldsymbol{r}(t) = (1-4t, 1-t, 2t)$, $t \in [0, 1]$;

(g) $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$; (h) $\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2, t^2, t^2\right)$, $t \in [0, 1]$.

Odpowiedzi.

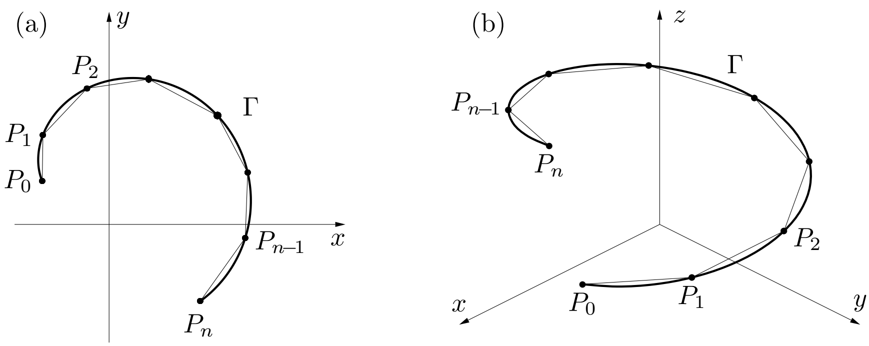


Definicja 1.9. *(długość łuku)*

Długością łuku Γ nazywamy kres górny długości łamanych $P_0P_1\ldots P_n$ wpisanych w ten łuk:

$$\text{długość}\,(\Gamma) = \sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \{P_0,P_1,\ldots,P_n\}}} \left\{\sum_{i=0}^{n-1} |P_iP_{i+1}|\right\},$$

gdzie $|P_iP_{i+1}|$ oznacza długość odcinka P_iP_{i+1} dla $0 \leqslant i \leqslant n-1$.



Rys. 1.13. Łamane wpisane w łuk: (a) na płaszczyźnie; (b) w przestrzeni

TWIERDZENIE 1.10. *(wzór na długość łuku)*
Niech Γ będzie łukiem gładkim o parametryzacji $\boldsymbol{r}(t)$, gdzie $t \in [\alpha, \beta]$. Wtedy:

$$\text{długość } (\Gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\boldsymbol{r}'(t)| \, dt,$$

gdzie $|\boldsymbol{r}'|$ oznacza długość wektora $\boldsymbol{r}'$.

Uwaga. Na płaszczyźnie dla łuku $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$ wzór przyjmuje postać:

$$\text{długość } (\Gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt,$$

a w przestrzeni dla łuku $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$ – postać:

$$\text{długość } (\Gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt.$$

Jeżeli łuk gładki Γ jest wykresem funkcji $y = y(x)$, gdzie $x \in [a, b]$, czyli $\Gamma = \{(x, y(x)) : x \in [a, b]\}$, to jego długość wyraża się wzorem:

$$\text{długość } (\Gamma) = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \, dx.$$

Podobny wzór mamy dla łuków o równaniu $x = x(y)$.

Przykład 1.11. Obliczyć długość łuku Γ:

(a) $\Gamma = \left\{\left(e^t \sin t, e^t \cos t\right) : t \in [0, \pi]\right\}$; (b) $\Gamma = \left\{\left(3t,\ 3t^2,\ 2t^3\right) : t \in [0, 1]\right\}$;

(c) $\Gamma :\ y = \ln \sin x,\ x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$; (d) $\Gamma :\ x = \sqrt{(4-y)^3},\ y \in [0, 4]$.

Rozwiązanie.
(a) Dla łuku Γ mamy $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, gdzie $t \in [0, \pi]$, więc

$$x'(t) = \left(e^t \sin t\right)' = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t),$$
$$y'(t) = \left(e^t \cos t\right)' = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$$

oraz

$$\begin{aligned}
&[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = \\
&= \left[e^t(\sin t + \cos t)\right]^2 + \left[e^t(\cos t - \sin t)\right]^2 \\
&= e^{2t}\left[\left(\sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t\right) + \left(\cos^2 t - 2\cos t\sin t + \sin^2 t\right)\right] = 2e^{2t}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\text{długość}\ (\Gamma) &= \int\limits_0^\pi \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \\
&= \int\limits_0^\pi \sqrt{2e^{2t}}\, dt = \sqrt{2}\int\limits_0^\pi e^t\, dt = \sqrt{2}\left[e^t\right]_0^\pi = \sqrt{2}\left(e^\pi - 1\right).
\end{aligned}$$

(b) Dla łuku Γ mamy $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, gdzie $t \in [0,1]$, więc

$$x'(t) = (3t)' = 3, \quad y'(t) = \left(3t^2\right)' = 6t, \quad z'(t) = \left(2t^3\right)' = 6t^2$$

oraz

$$\begin{aligned}
[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 &= 3^2 + (6t)^2 + \left(6t^2\right)^2 \\
&= 9 + 36t^2 + 36t^4 = 9\left(1 + 4t^2 + 4t^4\right).
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\text{długość}\ (\Gamma) &= \int\limits_0^1 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt = \int\limits_0^1 \sqrt{9\left(1 + 4t^2 + 4t^4\right)}\, dt \\
&= 3\int\limits_0^1 \sqrt{\left(1 + 2t^2\right)^2}\, dt = 3\int\limits_0^1 \left(1 + 2t^2\right)\, dt = 3\left[t + 2\cdot\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 5.
\end{aligned}$$

(c) W tym przykładzie łuk Γ jest wykresem funkcji $y(x) = \ln\sin x$, gdzie $x \in [\pi/4, \pi/2]$, więc

$$y'(x) = (\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x,$$

a dalej

$$1 + [y'(x)]^2 = 1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Zatem

$$\text{długość }(\Gamma) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x}} \left[\begin{array}{c} \text{wykorzystamy wzór:} \\ \sqrt{\sin^2 x} = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{array} \right]$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x} \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ \cos x = t, \quad -\sin x\,dx = dt \\ x = \pi/4, \quad t = \sqrt{2}/2 \\ x = \pi/2, \quad t = 0 \end{array} \right]$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \frac{-dt}{1-t^2} = \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} \left[\begin{array}{c} \text{rozkład na} \\ \text{ułamki proste} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \Big[\ln|1+t| - \ln|1-t| \Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.$$

(d) W kolejnym przykładzie łuk Γ jest wykresem funkcji $x(y) = \sqrt{(4-y)^3}$, gdzie $0 \leqslant y \leqslant 4$, więc

$$x'(y) = \left(\sqrt{(4-y)^3} \right)' = \left((4-y)^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2}\,(4-y)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1) = -\frac{3}{2}\sqrt{4-y},$$

a dalej

$$1 + [x'(y)]^2 = 1 + \left(-\frac{3}{2}\sqrt{4-y} \right)^2 = 1 + \frac{9}{4}(4-y) = \frac{40-9y}{4}.$$

Zatem

$$\text{długość }(\Gamma) = \int_0^4 \sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{40-9y}\,dy \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ 40-9y = u, \quad -9\,dy = du \\ y = 0, \quad u = 40 \\ y = 4, \quad u = 4 \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{40}^{4} -\frac{1}{9}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{18}\int_4^{40} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} \right]_4^{40} = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1 \right).$$

Zadanie 1.12. Obliczyć długość łuku Γ:

(a) $\Gamma = \left\{ \left(\cos^3 t, \sin^3 t \right) : t \in [0, 2\pi] \right\}$ – asteroida;

(b) $\Gamma = \{ (t - \sin t, 1 - \cos t) : t \in [0, 2\pi] \}$ – cykloida;

(c) $\Gamma : y = \cosh x,\ x \in [-1, 1]$ – linia łańcuchowa;

(d) $\Gamma : x = y^2,\ y \in [-1, 1]$ – łuk paraboli;

(e) $\Gamma = \{ (2\cos t, 2\sin t, t) : t \in [0, 2\pi] \}$ – jeden zwój linii śrubowej;

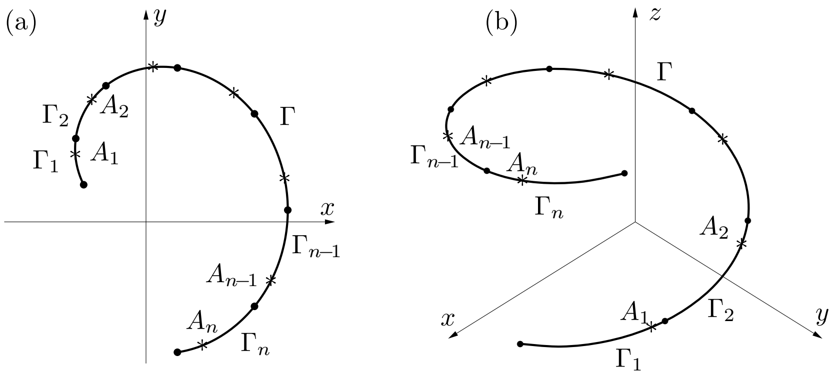
(f) $\Gamma = \left\{ e^{-t}\,(\cos t, \sin t, 1) : t \in [0, 1] \right\}$ – fragment linii śrubowej nawiniętej na stożek.

Odpowiedzi. (a) 6; (b) 8; (c) $e-\dfrac{1}{e}$; (d) $\sqrt{5}+\dfrac{\ln\left(\sqrt{5}+2\right)}{2}$; (e) $2\pi\sqrt{5}$; (f) $\sqrt{3}\,(1-1/e)$.

1.2 Całki krzywoliniowe niezorientowane

Definicja 1.13. *(całka krzywoliniowa niezorientowana)*

Niech Γ będzie łukiem gładkim na płaszczyźnie lub w przestrzeni. Wprowadzamy oznaczenia:
$\mathcal{P}$ – *podział łuku* Γ na łuki Γ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$;
Δl_k – długość łuku Γ_k;
$\delta(\mathcal{P}) = \max\left\{\Delta l_k :\ 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$ – *średnica podziału* $\mathcal{P}$;
A_k – *punkt pośredni* podziału wybrany na łuku Γ_k.



Rys. 1.14. Podział łuku Γ: (a) na płaszczyźnie; (b) w przestrzeni

Ponadto, niech funkcja f będzie określona i ograniczona na łuku Γ. *Całkę krzywoliniową niezorientowaną* funkcji f na łuku Γ definiujemy wzorem:

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dl = \lim_{\delta(\mathcal{P})\longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(A_k\right)\Delta l_k,$$

o ile granica po prawej stronie znaku równości istnieje i nie zależy od sposobu podziału łuku ani od sposobu wyboru punktów pośrednich. Wtedy mówimy, że funkcja f jest *całkowalna na łuku* Γ.

Uwaga. Zauważmy, że $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} dl = \text{długość}\ (\Gamma)$.

FAKT 1.14. *(liniowość całki krzywoliniowej niezorientowanej)*

Niech funkcje f i g będą całkowalne na łuku gładkim Γ i niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\int\limits_{\Gamma} (\alpha f + \beta g)\ dl = \alpha \int\limits_{\Gamma} f\,dl + \beta \int\limits_{\Gamma} g\,dl.$$

TWIERDZENIE 1.15. *(zamiana całki krzywoliniowej niezorientowanej na całkę pojedynczą)* Niech f będzie funkcją ciągłą na łuku gładkim Γ o parametryzacji $\boldsymbol{r}(t)$, gdzie $t \in [\alpha, \beta]$. Wtedy

$$\int_{\Gamma} f\, dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\left|\boldsymbol{r}'(t)\right| dt.$$

Uwaga. Dla łuku $\Gamma = \{(x(t),\ y(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$ na płaszczyźnie powyższy wzór przyjmuje postać:

$$\int_{\Gamma} f(x, y)\, dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt,$$

a dla łuku $\Gamma = \big\{\big(x(t), y(t), z(t)\big) : t \in [\alpha, \beta]\big\}$ w przestrzeni – postać:

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z)\, dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

Jeżeli łuk gładki Γ jest wykresem funkcji $y = y(x)$, gdzie $x \in [a, b]$, to

$$\int_{\Gamma} f(x, y)\, dl = \int_{a}^{b} f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

Podobnie, jeżeli łuk jest wykresem funkcji $x = x(y)$, gdzie $y \in [c, d]$, to

$$\int_{\Gamma} f(x, y)\, dl = \int_{c}^{d} f\big(x(y), y\big)\sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy.$$

Całka krzywoliniowa nie zależy od parametryzacji łuku.

Przykład 1.16. Niech $\Gamma = \Big\{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2,\ x \geqslant 0, y \geqslant 0\Big\}$ $(R > 0)$. Na przykładzie całki $\int_{\Gamma} x^2 y\, dl$ i podanych parametryzacji łuku Γ zweryfikować stwierdzenie, że całka krzywoliniowa niezorientowana nie zależy od parametryzacji:

(a) $x = R\cos t, y = R\sin t,\ t \in [0, \pi/2]$; (b) $x = t, y = \sqrt{R^2 - t^2},\ t \in [0, R]$.

Rozwiązanie. Przede wszystkim, jak w Przykładzie 1.5 (str. 12), łatwo sprawdzić, że

$$\Gamma = \left\{ (R\cos t, R\sin t) : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\} = \left\{ \left(t, \sqrt{R^2 - t^2}\right) : t \in [0, R] \right\}.$$

Pokażemy, że dla obu parametryzacji łuku Γ całki krzywoliniowe mają te same wartości.

(a) Ponieważ $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, więc

$$x'(t) = (R\cos t)' = -R\sin t, \quad y'(t) = (R\sin t)' = R\cos t,$$

a stąd

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = \sqrt{R^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = R.$$

Zatem, korzystając ze wzoru na zamianę całki krzywoliniowej niezorientowanej na całkę pojedynczą, mamy

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Gamma x^2 y\, dl &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(t) y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (R\cos t)^2 \cdot R\sin t \cdot R\, dt \\
&= R^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t\, dt \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ \cos t = u, \ \ -\sin t\, dt = du \\ t = 0, \ \ u = 1 \\ t = \pi/2, \ \ u = 0 \end{array} \right] \\
&= -R^4 \int\limits_1^0 u^2\, du = R^4 \int\limits_0^1 u^2\, du = R^4 \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{R^4}{3}.
\end{aligned}$$

(b) W tym przypadku mamy $x = t$, $y = \sqrt{R^2 - t^2}$, więc

$$x'(t) = (t)' = 1, \quad y'(t) = \left(\sqrt{R^2 - t^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - t^2}} \cdot (-2t)' = -\frac{t}{\sqrt{R^2 - t^2}},$$

a stąd

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{t}{\sqrt{R^2 - t^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{t^2}{R^2 - t^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - t^2}}.$$

Zatem, analogicznie jak powyżej, otrzymamy

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Gamma x^2 y\, dl &= \int\limits_0^R x^2(t) y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \\
&= \int\limits_0^R t^2 \sqrt{R^2 - t^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - t^2}}\, dt = R \int\limits_0^R t^2\, dt = R \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^R = \frac{R^4}{3}.
\end{aligned}$$

Zadanie 1.17. Niech $\Gamma = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2,\, x \geqslant 0, y \geqslant 0\right\}$ $(R > 0)$. Na przykładzie całki $\int\limits_{\Gamma} xy^2\, dl$ i podanych parametryzacji łuku Γ zweryfikować stwierdzenie, że całka krzywoliniowa niezorientowana nie zależy od parametryzacji:

(a) $x = R\cos t^2, y = R\sin t^2,\ t \in \left[0, \sqrt{\pi/2}\right]$;

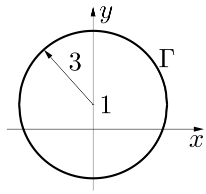
(b) $x = R\cos(-t), y = R\sin(-t),\ t \in [3\pi/2, 2\pi]$.

Przykład 1.18. Obliczyć całki krzywoliniowe funkcji f po łuku Γ:
(a) $f(x, y) = x(x + y)$,
Γ – okrąg o środku w punkcie $(0, 1)$ i promieniu 3;
(b) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$,
Γ – łuk paraboli $y^2 = 2x$ między punktami $(1, \sqrt{2})$, $(2, 2)$;
(c) $f(x, y, z) = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$,
Γ – jeden zwój linii śrubowej $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniach, do obliczania całek krzywoliniowych niezorientowanych, wykorzystamy wzory na ich zamianę na całki pojedyncze (Uwaga po Twierdzeniu 1.15).

(a) Łuk Γ jest okręgiem, którego równania parametryczne są postaci:

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 1 + 3\sin t, \quad \text{gdzie } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \end{cases}$$



więc $x'(t) = (3\cos t)' = -3\sin t$, $y'(t) = (1 + 3\sin t)' = 3\cos t$, a stąd

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2} = \sqrt{9\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = \sqrt{9} = 3.$$

Zatem, dla funkcji $f(x, y) = x(x + y)$ i łuku Γ o równaniach parametrycznych $x = 3\cos t$, $y = 1+3\sin t$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, całka krzywoliniowa nieskierowana jest równa

$$\int\limits_{\Gamma} x(x + y)\, dl = \int\limits_{0}^{2\pi} x(t)\left(x(t) + y(t)\right)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 3\cos t\,(3\cos t + 1 + 3\sin t)\cdot 3\,dt$$

$$= 27\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt + 9\int_0^{2\pi} \cos t\,dt + 27\int_0^{2\pi} \cos t \sin t\,dt \quad \left[\begin{array}{l}\text{wykorzystamy wzory:}\\ \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\\ \sin 2t = 2\sin t\cos t\end{array}\right]$$

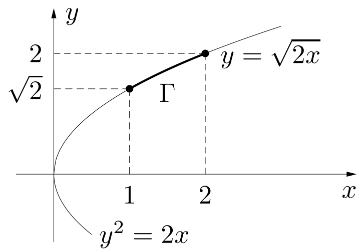
$$= 27\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\;dt + 9\int_0^{2\pi} \cos t\,dt + 27\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2t\,dt$$

$$= 27\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dt + 27\int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt + 9\int_0^{2\pi} \cos t\,dt + 27\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2t\,dt.$$

Ponieważ mamy oczywiste równości:

$$\int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt = 0,\quad \int_0^{2\pi} \cos t\,dt = 0,\quad \int_0^{2\pi} \sin 2t\,dt = 0,\quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dt = \pi,$$

więc ostatecznie $\displaystyle\int_\Gamma x(x+y)\,dl = 27\pi.$



(b) Łuk Γ jest wykresem funkcji $y = \sqrt{2x}$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant 2$, więc

$$y'(x) = \left(\sqrt{2x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}},$$

a stąd

$$\sqrt{1+[y'(x)]^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2x+1}{2x}}.$$

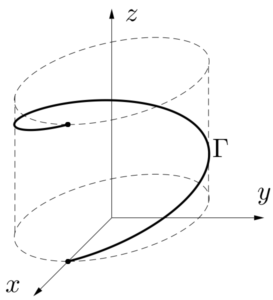
Tak więc, dla funkcji $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ i łuku Γ będącego wykresem funkcji $y = \sqrt{2x}$ na przedziale $[1,2]$, całka krzywoliniowa wyraża się wzorem

$$\int_\Gamma \frac{x}{y}\,dl = \int_1^2 \frac{x}{y(x)}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}}\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{2x+1}\,dx \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t = 2x+1,\quad dt = 2\,dx\\ x=1,\quad t=3\\ x=2,\quad t=5\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_3^5 \frac{\sqrt{t}\,dt}{2} = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_3^5 = \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right).$$

(c) Jeden zwój linii śrubowej Γ opisanej równaniami $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ otrzymamy, gdy $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Ponieważ



$$\begin{aligned} x'(t) &= (\cos t)' = -\sin t,\\ y'(t) &= (\sin t)' = \cos t,\\ z'(t) &= (t)' = 1, \end{aligned}$$

więc

$$\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2} = \sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Zatem, dla funkcji $f(x,y,z) = \dfrac{z^2}{x^2+y^2}$ i łuku Γ opisanego równanaiami parametrycznymi $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$, całka krzywoliniowa dana jest wzorem

$$\begin{aligned} \int\limits_\Gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}\,dl &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{z^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt\\ &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{t^2}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cdot\sqrt{2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} t^2\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{2}\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

Zadanie 1.19. Obliczyć całki krzywoliniowe funkcji f po łuku Γ:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$,
Γ – odcinek łączący punkty $(0,-1)$, $(2,0)$;

(b) $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 x$,
Γ – część hiperboli $xy = 1$ między punktami $(1,1)$, $(2,1/2)$;

(c) $f(x,y) = xy$,
Γ – część okręgu $x^2+y^2-2y = 0$ położona w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych;

(d) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$,
Γ – łuk spirali Archimedesa $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $t \in [0, \pi/2]$;

(e) $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}$,

Γ – odcinek łączący punkty $(1,1,1)$ i $(2,3,4)$;

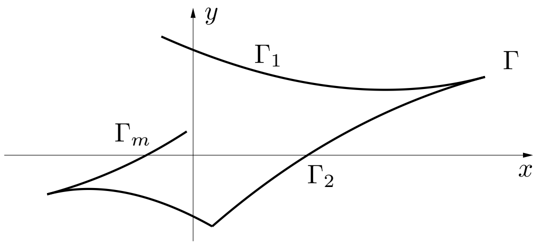
(f) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
Γ – okrąg powstały z przecięcia walca $x^2+y^2=4$ i płaszczyzny $z=2$;

(g) $f(x,y,z)=z^2$,
Γ – okrąg powstały z przecięcia sfery $x^2+y^2+z^2=1$ i płaszczyzny $y=x$.

Odpowiedzi. (a) $2\sqrt{5}\left(\sqrt{2}-1\right)$; (b) 3; (c) $(17\sqrt{17}-2\sqrt{2})/6$; (d) 2; (e) $\left(\sqrt{(\pi^2+3)^3}-8\right)/24$; (f) 8; (g) π; Wsk. $x(t)=(1/\sqrt{2})\cos t$, $y(t)=(1/\sqrt{2})\cos t$, $z=\sin t$, gdzie $t\in[0,2\pi]$

Definicja 1.20. *(całka krzywoliniowa niezorientowana po łuku kawałkami gładkim)* Niech Γ będzie łukiem kawałkami gładkim złożonym z łuków gładkich Γ_k $(1\leqslant k\leqslant m)$, przy czym sąsiednie łuki stykają się tylko końcami. Ponadto, niech f będzie funkcją całkowalną na łukach Γ_k. *Całkę krzywoliniową niezorientowaną* funkcji f po łuku Γ definiujemy wzorem:

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dl = \int\limits_{\Gamma_1} f\,dl+\int\limits_{\Gamma_2} f\,dl+\ldots+\int\limits_{\Gamma_m} f\,dl.$$



Rys. 1.15. Ilustracja do definicji całki krzywoliniowej niezorientowanej po łuku kawałkami gładkim

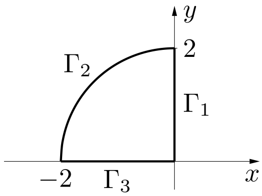
Przykład 1.21. Obliczyć całki krzywoliniowe funkcji f po kawałkami gładkim łuku Γ:

(a) $f(x,y)=(x+y)^2$,
Γ – brzeg ćwiartki koła $x^2+y^2\leqslant 4$, $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$;

(b) $f(x,y)=xy$,
Γ – składa się z odcinka łączącego punkty $(1,2)$, $(1,1)$; fragmentu paraboli $x=y^2$ od punktu $(1,1)$ do $(1,-1)$ oraz odcinka od punktu $(1,-1)$ do $(2,-1)$;

(c) $f(x,y,z)=x+y+z$,
Γ – brzeg powierzchni $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniach wykorzystamy Definicję 1.20 całki po łuku kawałkami gładkimi oraz wzory na zamianę całki krzywoliniowej niezorientowanej na całkę pojedynczą wyszczególnione w Uwadze po Twierdzeniu 1.15.
(a) Brzeg Γ ćwiartki koła składa się z łuków gładkich Γ_1, Γ_2, Γ_3 (rysunek). Zatem



$$\int\limits_{\Gamma} (x+y)^2\, dl = \int\limits_{\Gamma_1} (x+y)^2\, dl + \int\limits_{\Gamma_2} (x+y)^2\, dl + \int\limits_{\Gamma_3} (x+y)^2\, dl.$$

Obliczenie każdej z powyższych całek wymaga parametryzacji łuku, po którym całkujemy.
Dla łuku Γ_1 przyjmujemy równania parametryczne postaci: $x = 0$, $y = t$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2$. Tak więc, $x'(t) = 0$, $y'(t) = 1$, a stąd $\sqrt{[x^2(t)]^2 + [y'(t)]^2} = 1$. Zatem, całka krzywoliniowa funkcji $f(x,y) = (x+y)^2$ po łuku Γ_1 wyraża się wzorem

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_1} (x+y)^2\, dl &= \int\limits_0^2 (x(t)+y(t))^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \\ &= \int\limits_0^2 (0+t)^2\, dt = \int\limits_0^2 t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Dla łuku Γ_2 równania parametryczne przyjmujemy w postaci $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, gdzie $\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$. Stąd

$$x'(t) = (2\cos t)' = -2\sin t, \quad y'(t) = (2\sin t)' = 2\cos t,$$

a dalej

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{4\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = 2.$$

Zatem, jak powyżej, mamy

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_2} (x+y)^2\, dl &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x(t)+y(t))^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\cos t + 2\sin t)^2 \cdot 2\, dt = 8\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\cos^2 t + 2\cos t \sin t + \cos^2 t\right)\, dt =\end{aligned}$$

$$= 8\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+2\cos t\sin t)\,dt\begin{bmatrix}\text{wykorzystamy wzór:}\\ \sin 2t = 2\sin t\cos t\end{bmatrix} = 8\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\sin 2t)\,dt$$

$$= 8\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dt + 8\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2t\,dt = 8\Big[t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + 8\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 4\pi - 8.$$

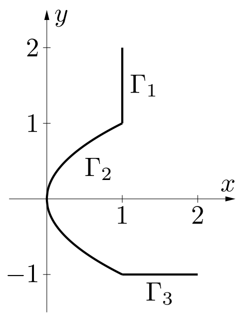
Dla łuku Γ_3 przyjmujemy parametryzację $x = t$, $y = 0$, gdzie $-2 \leqslant t \leqslant 0$. Tak więc, $x'(t) = 1$, $y'(t) = 0$, czyli $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = 1$. Stąd całka krzywoliniowa funkcji $f(x,y) = (x+y)^2$ po łuku Γ_3 jest równa

$$\int_{\Gamma_3}(x+y)^2\,dl = \int_{-2}^{0}(x(t)+y(t))^2\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$
$$= \int_{-2}^{0}(t+0)^2\,dt = \int_{-2}^{0}t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{8}{3}.$$

Ostatecznie $\displaystyle\int_{\Gamma}(x+y)^2\,dl = \frac{8}{3} + 4\pi - 8 + \frac{8}{3} = \frac{4(3\pi-2)}{3}$.

(b) Łuk Γ składa się z łuków gładkich Γ_1, Γ_2, Γ_3 (rysunek). Stąd i z definicji całki krzywoliniowej po takim łuku, mamy

$$\int_{\Gamma}xy\,dl = \int_{\Gamma_1}xy\,dl + \int_{\Gamma_2}xy\,dl + \int_{\Gamma_3}xy\,dl.$$



Każdą z powyższych całek obliczymy oddzielnie przyjmując odpowiednią parametryzację łuku, po którym całkujemy.

Łuk Γ_1 traktujemy jako wykres funkcji postaci $x = x(y)$, czyli mamy $x = 1$, gdzie $1 \leqslant y \leqslant 2$. Zatem całkę funkcji $f(x,y) = xy$ po łuku Γ_1 obliczymy ze wzoru

$$\int_{\Gamma_1}xy\,dl = \int_1^2 x(y)y\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy = \int_1^2 1\cdot y\sqrt{1+0}\,dy = \int_1^2 y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}.$$

Łuk Γ_2 również traktujemy jako wykres funkcji postaci $x = x(y)$. Mamy więc

$x = y^2$, gdzie $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Stąd $x'(y) = \left(y^2\right)' = 2y$, a dalej otrzymamy

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_2} xy\,dl &= \int\limits_{-1}^{1} x(y)y\sqrt{1 + [x'(y)]^2}\,dy \\ &= \int\limits_{-1}^{1} y^2 \cdot y\sqrt{1 + (2y)^2}\,dy = \int\limits_{-1}^{1} y^3\sqrt{1 + 4y^2}\,dy = 0.\end{aligned}$$

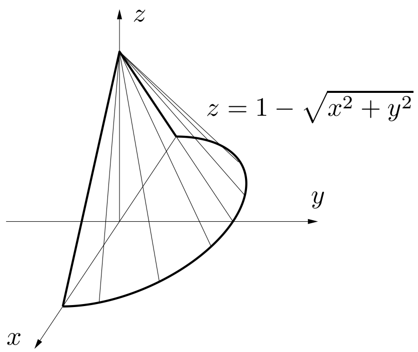
Ostatnia równość wynika z faktu, że przedział całkowania jest symetryczny względem 0, a funkcja podcałkowa – nieparzysta.
Łuk Γ_3 traktujemy jako wykres funkcji postaci $y = y(x)$, czyli $y = -1$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant 2$. Zatem całka krzywoliniowa funkcji $f(x, y) = xy$ po łuku Γ_3 jest równa

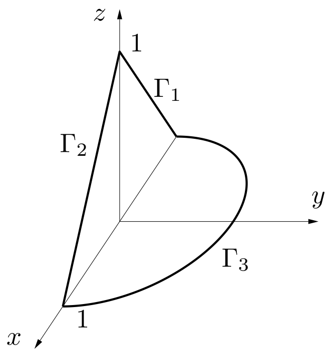
$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_3} xy\,dl &= \int\limits_{1}^{2} xy(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx \\ &= \int\limits_{1}^{2} x \cdot (-1)\sqrt{1 + 0}\,dx = -\int\limits_{1}^{2} x\,dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Ostatecznie $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} xy\,dl = \frac{3}{2} + 0 + \left(-\frac{3}{2}\right) = 0.$

(c) Brzeg Γ powierzchni określonej w zadaniu składa się z łuków gładkich Γ_1, Γ_2, Γ_3 (rysunek). Zatem

$$\int\limits_{\Gamma} (x + y + z)\ dl = \int\limits_{\Gamma_1} (x + y + z)\ dl + \int\limits_{\Gamma_2} (x + y + z)\ dl + \int\limits_{\Gamma_3} (x + y + z)\ dl.$$





Jak w poprzednich rozwiązaniach, każdą z powyższych całek obliczymy oddzielnie przyjmując odpowiednią parametryzację łuku, po którym całkujemy.

Łuk Γ_1 jest odcinkiem łączącym punkty $(-1,0,0)$, $(0,0,1)$. Równanie parametryczne tego łuku przyjmujemy postaci : $x=-1+t$, $y=0$, $z=t$, gdzie $0\leqslant t\leqslant 1$. Stąd $x'(t)=1$, $y'(t)=0$, $z'(t)=1$, więc

$$\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Zatem całka funkcji $f(x,y,z)=x+y+z$ po łuku Γ_1 wyraża się wzorem

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_1}(x+y+z)\,dl &= \int\limits_0^1 [x(t)+y(t)+z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt\\ &= \int\limits_0^1 [(-1+t)+0+t]\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}\int\limits_0^1(2t-1)\,dt\\ &= \sqrt{2}\Big[t^2-t\Big]_0^1=0.\end{aligned}$$

Z kolei łuk Γ_2 jest odcinkiem łączącym punkty $(0,0,1)$, $(1,0,0)$. Równanie parametryczne przyjmujemy postaci: $x=t$, $y=0$, $z=1-t$, gdzie $0\leqslant t\leqslant 1$. Tak więc, $x'(t)=1$, $y'(t)=0$, $z'(t)=-1$, a stąd

$$\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Jak powyżej, otrzymamy

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_2}(x+y+z)\,dl &= \int\limits_0^1 [x(t)+y(t)+z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt\\ &= \int\limits_0^1 [t+0+(1-t)]\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}\int\limits_0^1 dt=\sqrt{2}\Big[t\Big]_0^1=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Ostatni łuk Γ_3 jest półokręgiem leżącym na płaszczyźnie $z=0$, jego równanie parametryczne ma postać: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=0$, gdzie $0\leqslant t\leqslant\pi$. Mamy więc $x'(t)=-\sin t$, $y'(t)=\cos t$, $z'(t)=0$, a dalej

$$\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}=\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+0^2}=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1.$$

Jak poprzednio, mamy

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_3}(x+y+z)\,dl &= \int\limits_0^1 [x(t)+y(t)+z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt\\ &= \int\limits_0^\pi(\cos t+\sin t+0)\,dt=\Big[\sin t-\cos t\Big]_0^\pi=2.\end{aligned}$$

W konsekwencji $\int\limits_{\Gamma}(x+y+z)\,dl = 0+\sqrt{2}+2 = 2+\sqrt{2}.$

Zadanie 1.22. Obliczyć całki krzywoliniowe funkcji f po kawałkami gładkim łuku Γ:

(a) $f(x, y) = x + y$,
Γ – brzeg trójkąta o wierzchołkach $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$;

(b) $f(x, y) = xy$,
Γ – część okręgu $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geqslant 0$ zamknięta osią Ox;

(c) $f(x, y, z) = x + y + z$,
Γ – brzeg trójkąta o wierzchołkach $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

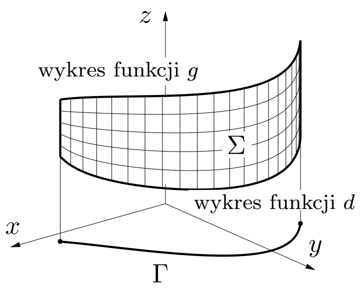
Odpowiedzi. (a) $1+\sqrt{2}$; (b) 2; (c) $3\sqrt{2}$.

1.3 Zastosowania całek krzywoliniowych niezorientowanych

Pole powierzchni walcowej

Niech Σ oznacza powierzchnię walcową o tworzących przechodzących przez łuk $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, która jest ograniczona z dołu i z góry odpowiednio przez wykresy funkcji ciągłych $z = d(x, y)$ i $z = g(x, y)$. Wtedy pole powierzchni Σ wyraża się wzorem:

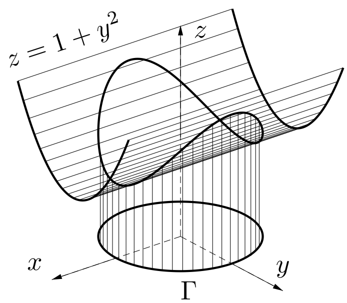
$$\text{pole}\,(\Sigma) = \int\limits_{\Gamma} [g(x, y) - d(x, y)]\; dl.$$



Rys. 1.16. Powierzchnia walcowa

Przykład 1.23. Obliczyć pole części walca $x^2 + y^2 = R^2\,(R > 0)$ odciętego z dołu płaszczyzną $z = 0$, a z góry powierzchnią $z = 1 + y^2$.

Rozwiązanie. Niech Σ oznacza część walca odciętą z góry powierzchnią o równaniu $g(x, y) = 1 + y^2$, a z dołu płaszczyzną o równaniu $d(x, y) = 0$ (rysunek). Wtedy pole Σ wyraża się całką krzywoliniową niezorientowaną



$$\text{pole}\,(\Sigma) = \int\limits_{\Gamma}\left(1 + y^2 - 0\right)\,dl = \int\limits_{\Gamma}\left(1+y^2\right)\,dl,$$

gdzie łuk Γ przez, który przechodzą tworzące powierzchni Σ jest okręgiem o promieniu R. Równanie parametryczne łuku ma postać $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Stąd $x'(t) = -R\sin t$, $y'(t) = R\cos t$ i

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = \sqrt{R^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = R.$$

Zatem, korzystając ze wzoru

$$\int_\Gamma f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt,$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \left(1+y^2\right)\,dl &= \int_0^{2\pi} \left(1+y^2(t)\right)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1+\sin^2 t\right)\cdot R\,dt = R\int_0^{2\pi}\left(1+\sin^2 t\right)dt \left[\begin{array}{c}\text{wykorzystamy wzór:}\\ \sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\end{array}\right] \\
&= R\int_0^{2\pi}\left[1+\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right]dt = \frac{1}{2}R\int_0^{2\pi}(3-\cos 2t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}R\left[3t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}R\cdot 6\pi = 3\pi R.
\end{aligned}$$

Pole części walca jest równe $3\pi R$.

Zadanie 1.24. Obliczyć pole części walca $x^2+y^2=1$ ograniczonego z dołu i z góry odpowiednio powierzchniami:
(a) $z=0$, $z=2+xy$; (b) $z=-x$, $z=5+y$.

Odpowiedzi. (a) 4π; (b) 10π.

Masa łuku

Masa łuku materialnego Γ o gęstości liniowej masy $\lambda(\boldsymbol{r})$ wyraża się wzorem:

$$\text{masa}\ (\Gamma) = \int_\Gamma \lambda(\boldsymbol{r})\,dl.$$

Uwaga. Gdy łuk Γ jest jednorodny o gęstości λ_0, to powyższy wzór przyjmuje postać:

$$\text{masa}\ (\Gamma) = \lambda_0 \cdot \text{długość}\ (\Gamma).$$

Przykład 1.25. Obliczyć masę:

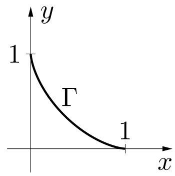
(a) łuku asteroidy $\Gamma: \ x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, o gęstości liniowej masy $\lambda(x, y) = x + y$;

(b) łuku $\Gamma: \ y = \ln x$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant e$, jeżeli gęstość liniowa masy wyraża się wzorem $\lambda(x, y) = x^2$;

(c) dwóch zwojów linii śrubowej Γ nawiniętej na walec o średnicy $d = 2$ i wysokości $H = 2$. Gęstość liniowa masy λ w dowolnym punkcie zwoju jest równa odległości tego punktu od podstawy walca.

Rozwiązanie. W rozwiązaniach, do obliczania całek krzywoliniowych nieskierowanych wykorzystamy wzory podane w Uwadze po Twierdzeniu 1.15.

(a) Masa łuku Γ o gęstości liniowej masy $\lambda(x, y) = x + y$ wyraża się wzorem



$$\text{masa}\ (\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} (x + y)\, dl.$$

Ponieważ łuk Γ opisany jest równaniami $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, więc $x'(t) = 3\cos^2 t(-\sin t)$, $y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$. Stąd

$$\begin{aligned}
\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} &= \sqrt{\left(-3\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(3\sin^2 t \cos t\right)^2} \\
&= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} = 3\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} \\
&= 3 \cos t \sin t.
\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że $\cos t \geqslant 0$, $\sin t \geqslant 0$ dla $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Zatem, dla funkcji $\lambda(x, y) = x + y$ i łuku Γ opisanego równaniami $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, mamy

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma} (x + y)\, dl &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [x(t) + y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 t + \sin^3 t\right) \cdot 3 \sin t \cos t\, dt \\
&= 3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t\, dt + 3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t\, dt.
\end{aligned}$$

Ostatnie dwie całki obliczymy metodą całkowania przez podstawienie. Mamy

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t\, dt \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ \cos t = \tau, \quad -\sin t\, dt = d\tau \\ t = 0, \quad \tau = 1 \\ t = \pi/2, \quad \tau = 0 \end{array}\right] = -\int\limits_1^0 \tau^4\, d\tau = \int\limits_0^1 \tau^4\, d\tau = \left[\frac{\tau^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

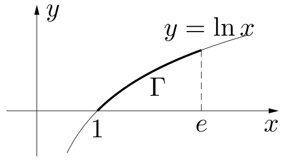
oraz

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t \, dt \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ \sin t = \tau, \quad \cos t \, dt = d\tau \\ t = 0, \quad \tau = 0 \\ t = \pi/2, \quad \tau = 1 \end{array}\right] = \int\limits_0^1 \tau^4 \, d\tau = \left[\frac{\tau^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

Zatem łuk Γ ma masę równą $3 \cdot \dfrac{1}{5} + 3 \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{6}{5}$.

(b) Masa łuku Γ o gęstości liniowej masy $\lambda(x, y) = x^2$ wyraża się wzorem

$$\text{masa } (\Gamma) = \int\limits_\Gamma x^2 \, dl.$$



Ponieważ, łuk Γ jest wykresem funkcji $y = \ln x$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant e$, więc $y'(x) = 1/x$ oraz

$$\sqrt{1 + [y'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

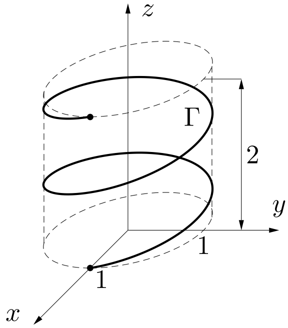
Zatem, dla funkcji $\lambda(x, y) = x^2$ i łuku Γ będącego wykresem funkcji $y = \ln x$, mamy

$$\begin{aligned} \int\limits_\Gamma x^2 \, dl &= \int\limits_1^e x^2 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \, dx = \int\limits_1^e x^2 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \, dx \\ &= \int\limits_1^e x\sqrt{x^2+1} \, dx \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ x^2+1 = u, \quad 2x \, dx = du \\ x = 1, \quad u = 2 \\ x = e, \quad u = e^2+1 \end{array}\right] = \int\limits_2^{e^2+1} \frac{1}{2}\sqrt{u} \, du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_2^{e^2+1} = \frac{1}{3}\left[\left(e^2+1\right)\sqrt{e^2+1} - 2\sqrt{2}\right]. \end{aligned}$$

Więc łuk Γ ma masę równą $\left[\left(e^2+1\right)\sqrt{e^2+1} - 2\sqrt{2}\right]/3$.

(c) Położenie walca i nawiniętych na nim dwóch zwojów linii śrubowej Γ przyjmujemy jak na rysunku. Gęstość liniowa masy λ łuku Γ w punkcie (x, y, z) jest równa odległości tego punktu od podstawy walca, czyli $\lambda(x, y, z) = z$. Zatem masa linii śrubowej Γ wyraża się wzorem

$$\text{masa } (\Gamma) = \int\limits_\Gamma z \, dl.$$



Dwa zwoje linii Γ nawinięto na walec o wysokości $H = 2$, więc jej skok $h = 1$. Ponieważ walec ma średnicę $d = 2$, czyli promień $R = 1$, więc równanie parametryczne łuku Γ (str. 15) można przyjąć postaci $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \dfrac{t}{2\pi}$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$. Stąd $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$, $z'(t) = \dfrac{1}{2\pi}$, a dalej

$$\begin{aligned}\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}\\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{4\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}\\ &= \frac{\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2\pi}.\end{aligned}$$

Więc całka krzywoliniowa gęstości $\lambda(x, y, z) = z$ po łuku Γ opisanym równaniami parametrycznymi $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \dfrac{t}{2\pi}$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$, dana jest równością

$$\begin{aligned}\int_\Gamma z\,dl &= \int_0^{4\pi} z(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt\\ &= \int_0^{4\pi} \frac{t}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{4\pi^2+1}}{2\pi}\,dt = \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{4\pi^2}\int_0^{4\pi} t\,dt = \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{4\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{4\pi}\\ &= 2\sqrt{4\pi^2+1}.\end{aligned}$$

Zatem łuk Γ ma masę równą $2\sqrt{4\pi^2+1}$.

Zadanie 1.26. Obliczyć masę:

(a) łuku $\Gamma:\ x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$, jeżeli gęstość liniowa masy wyraża się wzorem $\lambda(x, y) = |y|$;

(b) odcinka AB, gdzie $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, 2, 2)$, jeżeli gęstość liniowa masy w punkcie (x, y, z) odcinka jest równa xyz;

(c) jednego zwoju linii śrubowej Γ nawiniętej na walec o średnicy $2r$ $(r > 0)$, wysokości $2\pi h$ $(h > 0)$ i gęstości liniowej masy równej $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;

(d) łuku $\Gamma:\ x = t,\ y = t^2/2,\ z = t^2$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 1$, jeżeli gęstość liniowa masy w punkcie (x, y, z) łuku dana jest wzorem $\sqrt{2y}$.

Odpowiedzi. (a) 16; (b) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$; (c) $\dfrac{2\pi}{3}\left(4\pi^2h^2 + 3r^2\right)\sqrt{r^2+h^2}$; (d) $\dfrac{1}{15}\left(6\sqrt{6} - 1\right)$.

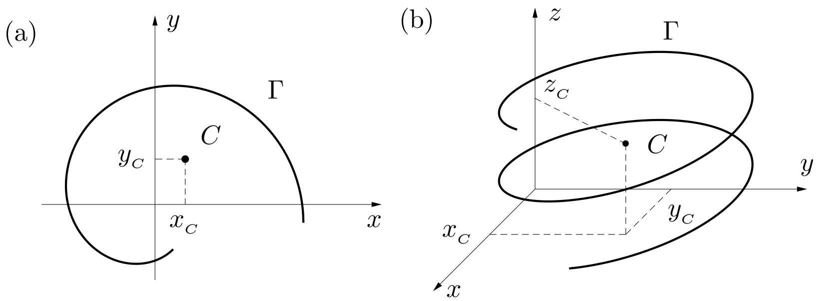
Współrzędne środka masy

Na płaszczyźnie współrzędne środka masy C łuku materialnego Γ o gęstości liniowej masy λ wyrażają się wzorami:

$$x_C = \frac{\int\limits_\Gamma x\lambda(x,y)\,dl}{\text{masa}\,(\Gamma)}, \qquad y_C = \frac{\int\limits_\Gamma y\lambda(x,y)\,dl}{\text{masa}\,(\Gamma)},$$

a w przestrzeni – wzorami:

$$x_C = \frac{\int\limits_\Gamma x\lambda(x,y,z)\,dl}{\text{masa}\,(\Gamma)}, \qquad y_C = \frac{\int\limits_\Gamma y\lambda(x,y,z)\,dl}{\text{masa}\,(\Gamma)}, \qquad z_C = \frac{\int\limits_\Gamma z\lambda(x,y,z)\,dl}{\text{masa}\,(\Gamma)}.$$

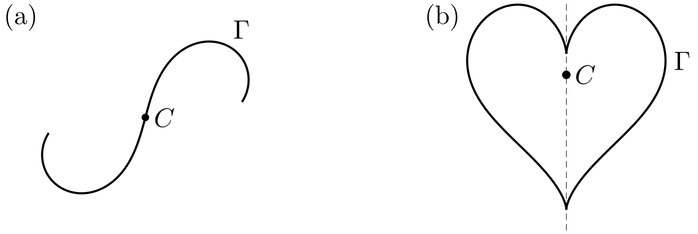


Rys. 1.17. Współrzędne środka masy łuku: (a) na płaszczyźnie; (b) w przestrzeni

Uwaga. Gdy łuk Γ jest jednorodny, to wzory na współrzędne środka masy przyjmują prostszą postać:

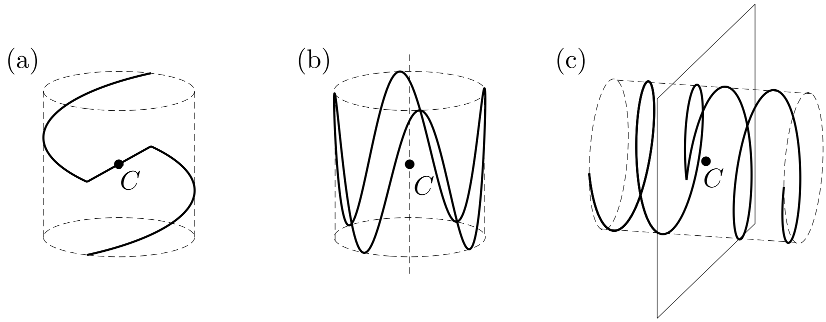
$$x_C = \frac{\int\limits_\Gamma x\,dl}{\text{długość}\,(\Gamma)}, \qquad y_C = \frac{\int\limits_\Gamma y\,dl}{\text{długość}\,(\Gamma)}, \qquad z_C = \frac{\int\limits_\Gamma z\,dl}{\text{długość}\,(\Gamma)}.$$

Jeżeli łuk materialny na płaszczyźnie ma środek lub oś symetrii i gęstość masy jest funkcją symetryczną względem tego środka lub osi (np. jest stała), to środek masy łuku pokrywa się ze środkiem lub leży na osi.



Rys. 1.19. Łuk na płaszczyźnie: (a) ze środkiem symetrii; (b) z osią symetrii

Jeżeli łuk materialny w przestrzeni ma środek symetrii, oś obrotu lub płaszczyznę symetrii i gęstość liniowa masy jest funkcją symetryczną odpowiednio względem tego środka, osi lub płaszczyzny (np. jest stała), to środek masy łuku pokrywa się ze środkiem albo leży na osi lub płaszczyźnie.



Rys. 1.20. Łuk w przestrzeni:
(a) ze środkiem symetrii; (b) z osią obrotu; (c) z płaszczyzną symetrii

Przykład 1.27. Wyznaczyć współrzędne środka masy:

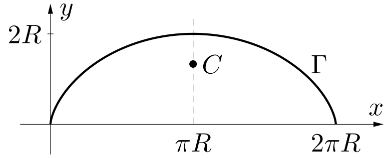
(a) jednorodnego łuku cykloidy $\Gamma : x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $(R > 0)$;

(b) łuku paraboli $\Gamma : y = x^2$, gdzie $-1 \leqslant x \leqslant 1$, jeżeli liniowa gęstość masy ma postać $\lambda(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2}$;

(c) jednorodnej łamanej Γ o wierzchołkach $A = \left(-1, 1, \sqrt{2}\right)$, $B = (0, 0, 0)$, $C = (1, -1, 1/2)$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniach, do obliczania długości łuków wykorzystamy wzory podane w Uwadze po Twierdzeniu 1.10 (str. 17), a dla obliczania całek krzywoliniowych nieskierowanych – wzory wyszczególnione w Uwadze po Twierdzeniu 1.15 (str. 21).

(a) Prosta $x = \pi R$ jest osią symetrii łuku cykloidy o jednorodnej gęstości liniowej, więc środek masy C leży na tej prostej, tzn. $x_C = \pi R$. Współrzędną y_C obliczymy ze wzoru



$$y_C = \frac{\int\limits_{\Gamma} y\, dl}{\text{długość } (\Gamma)}.$$

Obliczenia rozpoczniemy od wyznaczenia długości łuku Γ. Ponieważ łuk cykloidy opisany jest równaniami parametrycznymi postaci

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t),$$

gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, więc $x'(t) = R(1-\cos t)$, $y'(t) = R\sin t$, a stąd

$$\begin{aligned}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2} &= \sqrt{(R(1-\cos t))^2+(R\sin t)^2} \\ &= \sqrt{R^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)} = R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}.\end{aligned}$$

Zatem, ze wzoru na długość łuku, mamy

$$\begin{aligned}\text{długość }(\Gamma) &= \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt \left[\begin{array}{c}\text{wykorzystamy wzór:}\\ \cos t = 1-2\sin^2\frac{t}{2}\end{array}\right] \\ &= \sqrt{2}R\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2R\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\,dt \left[\begin{array}{c}\text{wykorzystamy fakt:}\\ \sin\frac{t}{2}\geqslant 0 \text{ dla } t\in[0,2\pi]\end{array}\right] \\ &= 2R\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2R\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8R.\end{aligned}$$

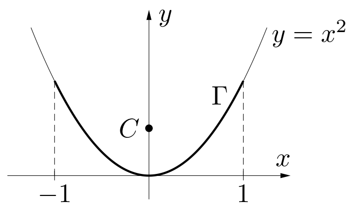
Przechodzimy do obliczenia całki krzywoliniowej funkcji $f(x,y)=y$ po łuku Γ. Mamy

$$\begin{aligned}\int\limits_\Gamma y\,dl &= \int\limits_0^{2\pi} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} R(1-\cos t)\cdot\sqrt{2}R\sqrt{1-\cos t}\,dt \left[\begin{array}{c}\text{wykorzystamy wzór:}\\ \cos t = 1-2\sin^2\frac{t}{2}\end{array}\right] \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2}R^2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\,dt = 4R^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt \\ &= 4R^2\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\,dt \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ \cos\frac{t}{2}=\tau,\quad -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = d\tau\\ t=0,\quad \tau=1\\ t=2\pi,\quad \tau=-1\end{array}\right] \\ &= 4R^2\int\limits_1^{-1} -2\left(1-\tau^2\right)\,d\tau = -8R^2\int\limits_{-1}^{1}\left(\tau^2-1\right)\,d\tau \\ &= -8R^2\left[\frac{\tau^3}{3}-\tau\right]_{-1}^{1} = \frac{32}{3}R^2.\end{aligned}$$

Zatem środek masy łuku cykloidy ma współrzędne:

$$x_C = \pi R, \quad y_C = \frac{\frac{32}{3}R^2}{8R} = \frac{4}{3}R.$$

(b) Zauważmy najpierw, że łuk jest symetryczny względem osi Oy. Ponadto, gęstość masy jest funkcją parzystą względem zmiennej x. Stąd wynika, że środek masy C należy do osi Oy. Zatem $x_C = 0$. Współrzędną y_C środka masy łuku Γ wyliczymy ze wzoru



$$y_C = \frac{\int\limits_\Gamma y\lambda(x,y)\,dl}{\text{masa }(\Gamma)} = \frac{\int\limits_\Gamma y\sqrt{1+4x^2}\,dl}{\text{masa }(\Gamma)}.$$

Obliczenia rozpoczniemy od wyznaczenia masy łuku Γ. Łuk Γ jest wykresem funkcji $y = x^2$, gdzie $-1 \leqslant x \leqslant 1$, a jego liniowa gęstość masy $\lambda(x,y) = \sqrt{1+4x^2}$, więc

$$\begin{aligned}
\text{masa }(\Gamma) &= \int\limits_\Gamma \lambda(x,y)\,dl = \int\limits_\Gamma \sqrt{1+4x^2}\,dl \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+[y(x)']^2}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+4x^2}\,dx \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \left(1+4x^2\right)\,dx = \left[x + 4\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

Przechodzimy do obliczenia całki krzywoliniowej funkcji $f(x,y) = y\sqrt{1+4x^2}$ po łuku Γ. Mamy

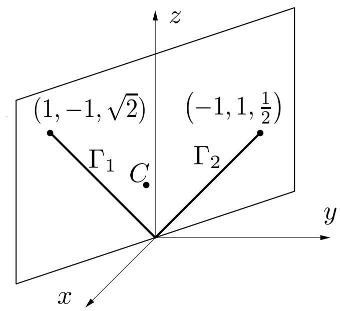
$$\begin{aligned}
\int\limits_\Gamma y\sqrt{1+4x^2}\,dl &= \int\limits_{-1}^{1} y(x)\sqrt{1+4x^2}\cdot\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx \\
&= \int\limits_{-1}^{1} x^2\cdot\sqrt{1+4x^2}\cdot\sqrt{1+4x^2}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\left(1+4x^2\right)\,dx \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2+4x^4\right)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{34}{15}.
\end{aligned}$$

Zatem środek masy łuku Γ ma współrzędne $x_C = 0$, $y_C = \dfrac{34}{15}\cdot\dfrac{3}{14} = \dfrac{17}{35}$.

(c) Łamana Γ składa się z odcinków Γ_1 oraz Γ_2 łączących odpowiednio punkty A i B oraz B i C. Zauważmy, że płaszczyzna $y = -x$ jest płaszczyzną symetrii łamanej Γ, a ponieważ jest ona również jednorodna, więc jej środek masy leży na tej płaszczyźnie, czyli ma współrzędne $(x_C, -x_C, z_C)$. Współrzędne x_C i z_C obliczymy ze wzorów

$$x_C = \frac{\int\limits_{\Gamma} x\,dl}{\text{długość }(\Gamma)} = \frac{\int\limits_{\Gamma_1} x\,dl}{\text{długość }(\Gamma)} + \frac{\int\limits_{\Gamma_2} x\,dl}{\text{długość }(\Gamma)},$$

$$z_C = \frac{\int\limits_{\Gamma} z\,dl}{\text{długość }(\Gamma)} = \frac{\int\limits_{\Gamma_1} z\,dl}{\text{długość }(\Gamma)} + \frac{\int\limits_{\Gamma_2} z\,dl}{\text{długość }(\Gamma)}.$$



Długość łamanej Γ jest sumą długości odcinków Γ_1 i Γ_2. Ponieważ odcinek Γ_1 łączy punkty $\left(1, -1, \sqrt{2}\right)$ i $(0, 0, 0)$, a odcinek Γ_2 punkty $(0, 0, 0)$ i $(-1, 1, 1/2)$, więc ze wzoru na odległość punktów w przestrzeni mamy odpowiednio

$$\text{długość }(\Gamma_1) = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2 + (\sqrt{2}-0)^2} = 2,$$

$$\text{długość }(\Gamma_2) = \sqrt{(0+1)^2 + (0-1)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Stąd długość $(\Gamma) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$. Odcinki Γ_1, Γ_2 można opisać równaniami parametrycznymi postaci:

$$\Gamma_1 : x = t,\ y = -t,\ z = \sqrt{2}t, \text{ gdzie } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\Gamma_2 : x = -t,\ y = t,\ z = \frac{1}{2}t, \text{ gdzie } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

więc dla łuków Γ_1, Γ_2 mamy odpowiednio:

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2,$$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Teraz obliczymy całki $\int\limits_{\Gamma_1} x\,dl$, $\int\limits_{\Gamma_2} x\,dl$, $\int\limits_{\Gamma_1} z\,dl$, $\int\limits_{\Gamma_2} z\,dl$, korzystając ze wzoru

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y, z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\,[z'(t)]^2}\,dt.$$

Mamy kolejno

$$\int\limits_{\Gamma_1} x\,dl = \int\limits_0^1 t\cdot 2\,dt = \left[t^2\right]_0^1 = 1, \quad \int\limits_{\Gamma_2} x\,dl = \int\limits_0^1 -t\cdot\frac{3}{2}\,dt = -\frac{3}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{3}{4},$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} z\,dl = \int\limits_0^1 \sqrt{2}t\cdot 2\,dt = \sqrt{2}\left[t^2\right]_0^1 = \sqrt{2}, \quad \int\limits_{\Gamma_2} z\,dl = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}t\cdot\frac{3}{2}\,dt = \frac{3}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{8}.$$

W konsekwencji

$$x_C = \frac{2}{7}\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{14}, \quad y_C = -x_C = -\frac{1}{14}, \quad z_C = \frac{2}{7}\left(\sqrt{2}+\frac{3}{8}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{7}+\frac{3}{28}.$$

Zadanie 1.28. Wyznaczyć współrzędne środków masy łuków jednorodnych:
(a) linia łańcuchowa $y = \cosh x$, gdzie $|x| \leqslant 1$;
(b) ćwiartka okręgu o promieniu R;
(c) półokrąg o promieniu R wraz ze średnicą;
(d) łuk asteroidy o równaniu $x = 6\cos^3 t,\ y = 6\sin^3 t$, gdzie $t \in [0, \pi/2]$;
(e) linia śrubowa $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = bt$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;
(f) brzeg trójkąta sferycznego $x^2+y^2+z^2 = 1$, gdzie $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;
(g) krzywa $x^2+y^2 = 1$, $x+2y+3z = 12$.

Odpowiedzi. (a) $x_C = 0$, $y_C = \dfrac{e^4+4e^2-1}{4e\left(e^2-1\right)}$; (b) $x_C = y_C = \dfrac{2}{\pi}R$; (c) $x_C = 0$, $y_C = \dfrac{2R}{2+\pi}$; (d) $x_C = y_C = \dfrac{12}{5}$; (e) $x_C = y_C = 0$, $z_C = \pi b$; (f) $x_C = y_C = z_C = \dfrac{4}{3\pi}$; (g) $x_C = y_C = 0$, $z_C = 4$.

Momenty bezwładności

Momenty bezwładności względem osi lub początku układu współrzędnych płaskiego łuku materialnego Γ o gęstości liniowej masy λ wyrażają się wzorami:

$$I_x = \int\limits_\Gamma y^2\lambda(x,y)\,dl, \quad I_y = \int\limits_\Gamma x^2\lambda(x,y)\,dl, \quad I_O = \int\limits_\Gamma \left(x^2+y^2\right)\lambda(x,y)\,dl.$$

Z kolei momenty bezwładności względem osi lub początku układu współrzędnych przestrzennego łuku materialnego Γ o gęstości liniowej masy λ wyrażają się wzorami:

$$I_x = \int\limits_\Gamma \left(y^2+z^2\right)\lambda(x,y,z)\,dl, \quad I_y = \int\limits_\Gamma \left(x^2+z^2\right)\lambda(x,y,z)\,dl,$$

$$I_z = \int\limits_{\Gamma} \left(x^2 + y^2\right) \lambda(x, y, z)\, dl, \quad I_O = \int\limits_{\Gamma} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \lambda(x, y, z)\, dl.$$

Uwaga. Gdy łuk Γ w przestrzeni jest jednorodny, to ostatni wzór przyjmuje prostszą postać:

$$I_O = \frac{\text{masa }(\Gamma)}{\text{długość }(\Gamma)} \int\limits_{\Gamma} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dl.$$

Analogicznie uproszczają się pozostałe wzory.

Przykład 1.29. Obliczyć moment bezwładności:

(a) jednorodnego okręgu Γ o promieniu R i masie M, względem jego średnicy;

(b) jednorodnego odcinka Γ na płaszczyźnie o długości $2d$ i masie M, względem prostej przechodzącej przez jego środek i nachylonej pod kątem $\pi/3$;

(c) linii łańcuchowej Γ o równaniu $y = \cosh x$, gdzie $|x| \leqslant 1$ i gęstości liniowej masy $\lambda(x, y) = |x|$, względem osi symetrii;

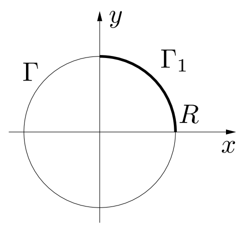
(d) jednorodnej stożkowej linii śrubowej Γ:

$$\boldsymbol{r}(t) = e^{-t} (\cos t, \sin t, 1), \quad \text{gdzie } t \in [0, 2\pi],$$

względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie. W rozwiązaniach, do obliczenia całek krzywoliniowych nieskierowanych, wykorzystamy wzory wyszczególnione w Uwadze po Twierdzeniu 1.15 (str. 21).

(a) Niech okrąg będzie położony względem układu współrzędnych jak na rysunku. Moment bezwładności tego okręgu obliczymy względem osi Oy. Zauważmy, że ze względu na symetrię, moment bezwładności całego okręgu Γ jest 4-krotnie większy niż moment ćwiartki Γ_1 tego okręgu. Ponieważ okrąg Γ jest jednorodny, więc jego gęstość liniową masy $\lambda(x, y) = \lambda_0$ obliczymy ze wzoru



$$\lambda_0 = \frac{\text{masa }(\Gamma)}{\text{długość }(\Gamma)} = \frac{M}{2\pi R}.$$

Moment bezwładności okręgu Γ względem jego średnicy wyraża się wzorem

$$I_y = \int\limits_{\Gamma} x^2 \lambda_0\, dl = 4\lambda_0 \int\limits_{\Gamma_1} x^2\, dl = \frac{4M}{2\pi R} \int\limits_{\Gamma_1} x^2\, dl.$$

Łuk Γ_1 ma przedstawienie parametryczne $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Stąd $x'(t) = -R\sin t$, $y'(t) = R\cos t$ oraz

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{(R\cos t)^2 + (R\sin t)^2} = \sqrt{R^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} = R.$$

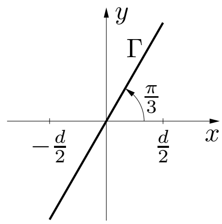
Tak więc, całka krzywoliniowa z funkcji $f(x,y) = x^2$ po łuku Γ_1 o wskazanej parametryzacji jest równa

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} x^2\,dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\cos t)^2 \cdot R\,dt \\ &= R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt \left[\begin{array}{c}\text{wykorzystamy wzór:}\\ \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\end{array}\right] = R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt \\ &= \frac{R^3}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{R^3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Zatem moment bezwładności okręgu Γ względem jego średnicy jest równy

$$I_y = 4\cdot\frac{M}{2\pi R}\cdot\frac{R^3\pi}{4} = \frac{MR^2}{2}.$$

(b) Niech odcinek Γ będzie położony względem układu współrzędnych jak na rysunku. Wtedy moment bezwładności tego odcinka względem prostej przechodzącej przez jego środek i nachylonej pod zadanym kątem, jest momentem bezwładności względem osi Ox. Z założenia odcinek Γ jest jednorodny, więc jego gęstość liniowa masy $\lambda(x,y) = \lambda_0$ jest równa



$$\lambda_0 = \frac{\text{masa }(\Gamma)}{\text{długość }(\Gamma)} = \frac{M}{2d}.$$

Moment bezwładności danego odcinka wyraża się wzorem

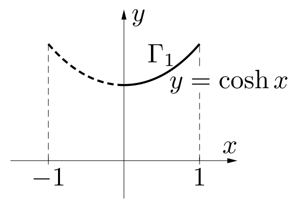
$$I_x = \lambda_0\int_\Gamma y^2\,dl = \frac{M}{2d}\int_\Gamma y^2\,dl.$$

Odcinek Γ jest wykresem funkcji $y = \sqrt{3}x$, gdzie $-d/2 \leqslant x \leqslant d/2$. Zatem, całka krzywoliniowa funkcji $f(x,y) = y^2$ po łuku Γ wyraża się wzorem

$$\int\limits_{\Gamma} y^2\,dl = \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} y^2(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{3}x\right)^2\sqrt{1+\left[\left(\sqrt{3}x\right)'\right]^2}\,dx$$
$$= \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} 3x^2\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,dx = 6\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x^2\,dx = 6\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} = 6\cdot\frac{d^3}{12} = \frac{d^3}{2}.$$

Tak więc, szukany moment bezwładności jest równy $\dfrac{M}{2d}\cdot\dfrac{d^3}{2} = \dfrac{Md^2}{4}$.

(c) Niech Γ_1 oznacza fragment łuku Γ, gdy $0 \leqslant x \leqslant 1$ (rysunek). Linia łańcuchowa Γ jest symetryczna względem osi Oy, a gęstość liniowa masy $\lambda(x,y) = |x|$ jest funkcją parzystą względem zmiennej x, więc moment bezwładności łuku Γ względem jego osi symetrii, czyli osi Oy, będzie dwukrotnie większy od momentu bezwładności łuku Γ_1. Zatem



$$I_y = \int\limits_{\Gamma} x^2\lambda(x,y)\,dl = 2\int\limits_{\Gamma_1} x^2\lambda(x,y)\,dl = 2\int\limits_{\Gamma_1} x^2|x|\,dl.$$

Tak więc, całkę krzywoliniową funkcji $f(x,y) = x^2x$ po łuku Γ_1, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1$, obliczamy ze wzoru

$$\int\limits_{\Gamma_1} x^2|x|\,dl = \int\limits_0^1 x^2|x|\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = \int\limits_0^1 x^2|x|\sqrt{1+[(\cosh x)']^2}\,dx$$
$$= \int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx \left[\begin{smallmatrix}\text{wykorzystamy wzór}\\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\end{smallmatrix}\right] = \int\limits_0^1 x^3\cosh x\,dx.$$

Ostatnią całkę obliczymy wykorzystując trzykrotnie metodę całkowania przez części. Mamy

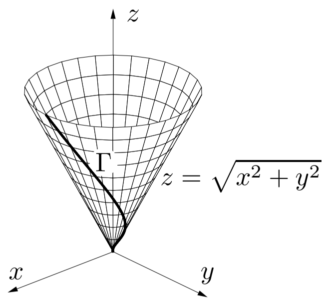
$$\int\limits_0^1 x^3\cosh x\,dx \left[\begin{smallmatrix}\text{całkowanie przez części}\\ f(x)=x^3, & g'(x)=\cosh x\\ f'(x)=3x^2, & g(x)=\sinh x\end{smallmatrix}\right] =$$
$$= \left[x^3\sinh x\right]_0^1 - 3\int\limits_0^1 x^2\sinh x\,dx \left[\begin{smallmatrix}\text{całkowanie przez części}\\ f(x)=x^2, & g'(x)=\sinh x\\ f'(x)=2x, & g(x)=\cosh x\end{smallmatrix}\right]$$
$$= \sinh 1 - 3\left(\left[x^2\cosh x\right]_0^1 - 2\int\limits_0^1 x\cosh x\,dx\right) \left[\begin{smallmatrix}\text{całkowanie przez części}\\ f(x)=x, & g'(x)=\cosh x\\ f'(x)=1, & g(x)=\sinh x\end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \sinh 1 - 3\cosh 1 + 6\left([x\sinh x]_0^1 - \int\limits_0^1 \sinh x\,dx\right)$$
$$= \sinh 1 - 3\cosh 1 + 6\sinh 1 - 6\,[\cosh x]_0^1$$
$$= 7\sinh 1 - 9\cosh 1 + 6\begin{bmatrix}\text{wykorzystamy wzory}\\ \sinh x = \left(e^x - e^{-x}\right)/2\\ \cosh x = \left(e^x + e^{-x}\right)/2\end{bmatrix} = 6 - e - \frac{8}{e}.$$

Zatem szukany moment bezwładności jest równy $2\left(6 - e - 8e^{-1}\right)$.

(d) Moment bezwładności jednorodnej linii śrubowej Γ względem początku układu współrzędnych obliczymy ze wzoru

$$I_0 = \lambda_0 \int\limits_\Gamma \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,dl.$$



Stożkowa linia śrubowa dana jest równaniami parametrycznymi postaci: $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Zatem

$$x'(t) = \left(e^{-t}\cos t\right)' = -e^{-t}\cos t + e^{-t}(-\sin t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t),$$
$$y'(t) = \left(e^{-t}\sin t\right)' = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = -e^{-t}(\sin t - \cos t),$$
$$z'(t) = \left(e^{-t}\right)' = -e^{-t}.$$

Stąd

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} =$$
$$= \sqrt{\left(-e^{-t}(\cos t + \sin t)\right)^2 + \left(-e^{-t}(\sin t - \cos t)\right)^2 + \left(-e^{-t}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-e^{-t}\right)^2\left(\cos^2 t + 2\cos t\sin t + \sin^2 t + \sin^2 t - 2\sin t\cos t + \cos^2 t + 1\right)}$$
$$= e^{-t}\sqrt{3}$$

Tak więc, moment bezwładności linii śrubowej względem początku układu współrzędnych jest równy

$$I_0 = \lambda_0 \int\limits_\Gamma \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,dl$$
$$= \lambda_0 \int\limits_0^{2\pi} \left[x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\right]\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt =$$

$$= \lambda_0 \int\limits_0^{2\pi} \left[\left(e^{-t}\cos t\right)^2 + \left(e^{-t}\sin t\right)^2 + \left(e^{-t}\right)^2 \right] \cdot e^{-t}\sqrt{3}\, dt$$

$$= \sqrt{3}\lambda_0 \int\limits_0^{2\pi} \left(e^{-t}\right)^2 \left(\cos^2 t + \sin^2 t + 1\right) e^{-t}\, dt = \sqrt{3}\lambda_0 \int\limits_0^{2\pi} e^{-3t} \cdot 2\, dt$$

$$= 2\sqrt{3}\lambda_0 \int\limits_0^{2\pi} e^{-3t}\, dt = 2\sqrt{3}\lambda_0 \left[-\frac{e^{-3t}}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(1 - e^{-6\pi}\right) \lambda_0.$$

Zadanie 1.30. Obliczyć moment bezwładności:

(a) jednorodnego brzegu kwadratu o boku a i masie M, względem jego przekątnej;

(b) jednorodnego odcinka AB, gdzie $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 5, 4)$ o masie M, względem osi Oz;

(c) jednorodnej linii śrubowej $\Gamma : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, o masie M, względem osi Oz;

(d) łuku $\Gamma : x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t$, gdzie $t \in [2\pi, 4\pi]$, o gęstości liniowej masy $\lambda(x, y, z) = \dfrac{1}{z}$, względem osi Oz.

Odpowiedzi. (a) $\dfrac{Ma^2}{6}$; (b) $\dfrac{52M}{3}$; (c) Ma^2; (d) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left[\sqrt{(8\pi^2+1)^3} - \sqrt{(2\pi^2+1)^3}\right]$.