

**ALGEBRA
I
GEOMETRIA
ANALITYCZNA**

Opracowanie
Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

**ALGEBRA
I
GEOMETRIA
ANALITYCZNA**

Kolokwia i egzaminy

Wydanie siedemnaste powiększone



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2024

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1996 – 2024 by Marian Gewert and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978-83-67234-14-6

Wydanie XVII powiększone, Wrocław 2024
Oficina Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp	7
Zestawy zadań z kolokwiów	9
Kolokwium pierwsze	9
Kolokwium drugie	20
Zestawy zadań z egzaminów	37
Egzamin podstawowy	37
Egzamin poprawkowy	59
Odpowiedzi i wskazówki	80
Kolokwium pierwsze	80
Kolokwium drugie	89
Egzamin podstawowy	94
Egzamin poprawkowy	99
Tematyczne zestawienie zadań	105

Wstęp

Opracowanie* jest trzecią częścią zestawu podręczników do przedmiotu Algebra z geometrią analityczną. Pozostałymi częściami zestawu są „*Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory*” oraz „*Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania*”. Książka zawiera zestawy zadań, które w ubiegłych latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na kolokwiach i egzaminach. Zadania obejmują liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych oraz geometrię analityczną w przestrzeni. Do wszystkich zestawów z kolokwii oraz do zestawów egzaminacyjnych o numerach nieparzystych podane są odpowiedzi.

Opracowanie pozwala studentom zapoznać się z rodzajami oraz stopniem trudności zadań kolokwialnych i egzaminacyjnych. Jest to jednocześnie dodatkowy materiał do samodzielnej nauki.

Studentów Politechniki Wrocławskiej zainteresowanych udziałem w konkursie matematycznym „Egzamin na ocenę celującą” zachęcamy do zapoznania się z książką pt. „*Studencki konkurs matematyczny*”. To opracowanie zawiera zadania wraz z rozwiązaniami z konkursów, które odbyły się w latach 1994 – 2021.

Obecne wydanie książki powiększyliśmy o tematyczny zestaw zadań. Do każdego tematu kursu algebra z geometrią analityczną przypisaliśmy zadania z kolokwii i egzaminów. Ułatwia to znalezienie zadań o wybranej tematyce.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za zestawy z kolokwii i egzaminów, a także za uwagi o poprzednich wydaniach tego zbioru.

Marian Gewert

Zbigniew Skoczylas

*Do 2005 r. książka miała tytuł „*Algebra liniowa 1. Kolokwia i egzaminy*”.

Zestawy zadań z kolokwiów

Kolokwium pierwsze

Zestaw 1.

odp. str. 80

1. Obliczyć $(\sqrt{3} - i)^{32}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Narysować zbiór liczb zespolonych z , dla których $0 < \arg(z^3) < \pi/2$.
3. Rozwiązać równanie $z^6 = (1 + 3i)^{12}$.
4. Funkcję wymierną $\frac{x^2}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

Zestaw 2.

odp. str. 80

1. Obliczyć $(\sqrt{3} + i)^{32}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Narysować zbiór liczb zespolonych z , dla których $\pi/2 < \arg(z^3) < \pi$.
3. Rozwiązać równanie $z^6 = (1 - 3i)^{12}$.
4. Funkcję wymierną $\frac{x^2}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

Zestaw 3.

odp. str. 80

1. Obliczyć $(-\sqrt{3} + i)^{32}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Narysować zbiór liczb zespolonych z , dla których $\pi < \arg(z^3) < 3\pi/2$.

Obecnie na obu kolokwiach studenci otrzymują do rozwiązania w czasie 45 minut 3 zadania.

3. Rozwiązać równanie $z^6 = (3 - i)^{12}$.
4. Funkcję wymierną $\frac{-x^2}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

Zestaw 4.*odp. str. 80*

1. Obliczyć $(-\sqrt{3} - i)^{32}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Rozwiązać równanie $z^6 = (3 + i)^{12}$.
3. Narysować zbiór liczb zespolonych z , dla których $3\pi/2 < \arg(z^3) < 2\pi$.
4. Funkcję wymierną $\frac{x^2}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

Zestaw 5.*odp. str. 81*

1. Rozwiązać równanie $z^8 - (\sqrt{3} + i)^8 = 0$.
2. Narysować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^3) > \operatorname{Re}(z^3)\}$.
3. Jednym z pierwiastków wielomianu $z^4 + 2z^3 + 9z^2 + 8z + 20$ jest liczba $-1 - 2i$. Znaleźć pozostałe pierwiastki.
4. Obliczyć sumę $1 + \frac{\sqrt{3} - i}{2} + \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{20}$.

Zestaw 6.*odp. str. 81*

1. Rozwiązać równanie $z^6 = (\bar{z})^6$ i naszkicować jego pierwiastki, wykorzystując odpowiednią postać liczby zespolonej.
2. Naszkicować zbiór $\left\{z \in \mathbb{C} : |z^3| \leq 8, 0 \leq \arg(z^3) \leq \frac{\pi}{4}\right\}$.
3. Rozwiązać równanie $z^7 + 2z^4 + z = 0$.
4. Liczba $2 - i$ jest pierwiastkiem wielomianu
$$z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25.$$

Wyznaczyć pozostałe pierwiastki i rozłożyć wielomian na rzeczywiste czynniki nierozkładalne.

Zestaw 7.

odp. str. 81

1. Znaleźć i przedstawić graficznie pierwiastki wielomianu $z^4 - iz^2 + 2$.
2. Obliczyć $\sqrt[4]{-16}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.
3. Narysować zbiór $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg(iz) = \frac{\pi}{3}\right\}$.
4. Korzystając z postaci wykładniczej liczby zespolonej naszkicować zbiór $\left\{z \in \mathbb{C} : z^4 = (\bar{z})^4, |z^3| \geq |9\bar{z}|\right\}$.

Zestaw 8.

odp. str. 82

1. Narysować zbiór $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg(iz^5) = 0\right\}$.
2. Obliczyć $\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)^7$. Wynik podać w postaci algebraicznej.
3. Wyznaczyć moduł i argument główny liczby zespolonej $\frac{(1 + i\sqrt{3})^{17}}{(1 - i)^{28}}$.
4. Znaleźć pierwiastki wielomianu $z^3 - z + 6$.

Zestaw 9.

odp. str. 82

1. Obliczyć $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}i - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{18}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Rozwiązać równanie $z^3 = (1 - 3i)^6$.
3. Sprawdzić, że i jest pierwiastkiem wielomianu $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1$, a następnie znaleźć pozostałe pierwiastki.
4. Które z iloczynów A^2B , AB^2 , BA^2 , B^2A istnieją i wyjaśnić dlaczego?
Obliczyć te, które istnieją dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zestaw 10.

odp. str. 82

1. Obliczyć $W(i)$, a następnie znaleźć pierwiastki wielomianu $W(z) = z^4 + 3z^3 + 2z^2 + 3z + 1$.

2. Które z iloczynów A^2B , AB^2 , BA^2 , B^2A istnieją i wyjaśnić dlaczego?

Obliczyć te, które istnieją dla $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

3. Obliczyć $\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{24}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

4. Rozwiązać równanie $z^4 = (1 + 2i)^8$.

Zestaw 11.

odp. str. 82

1. Które z iloczynów A^2B , AB^2 , BA^2 , B^2A istnieją i wyjaśnić dlaczego?

Obliczyć te, które istnieją dla $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

2. Znaleźć pierwiastki wielomianu $z^3 + 7z^2 + 7z + 6$.

3. Rozwiązać równanie $|\bar{z}|^2 = \frac{|z|^2}{\bar{z} - i}$.

4. Obliczyć i przedstawić w postaci algebraicznej $\sqrt[6]{-64}$.

Zestaw 12.

odp. str. 82

1. Rozwiązać równanie $|z|^2 + (1 + i)\bar{z} = 0$.

2. Obliczyć $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

3. Które z iloczynów A^2B , AB^2 , BA^2 , B^2A istnieją i wyjaśnić dlaczego?

Obliczyć te, które istnieją dla $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

4. Znaleźć pierwiastki wielomianu $z^3 + 9z^2 + 9z - 10$.

Zestaw 13.

odp. str. 82

1. Funkcję wymierną $\frac{3x^2}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

2. Znaleźć postać algebraiczną liczby zespolonej $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^2 (1 - i)^3}{\sqrt{3} + i} i^3$.

3. Rozwiązać równanie $z^4 = \frac{-18}{1 + i\sqrt{3}}$.

4. Narysować zbiór liczb zespolonych z , dla których $0 < \arg(z^3) < \pi/4$.

Zestaw 14.*odp. str. 83*

1. Funkcję wymierną $\frac{1+x^3}{x^2(1-x)^2}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

2. Liczbę zespoloną $(1 + i\sqrt{3})^{150}$ przedstawić w postaci algebraicznej.

3. Rozwiązać równanie macierzowe $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

4. Narysować zbiór liczb zespolonych z spełniających warunek $\operatorname{Re}[(z+1)^2] > 0$.

Zestaw 15.*odp. str. 83*

1. Funkcję wymierną $\frac{5x^2}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

2. Liczbę zespoloną $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^8}{(i - 1)^6}$ przedstawić w postaci algebraicznej.

3. Wyznaczyć resztę z dzielenia wielomianu $x^{100}(x^2 + x + 1)$ przez wielomian $x^2 - 1$, bez wykonywania dzielenia.

4. Obliczyć te z iloczynów AB^2 , BA^2 , $AB^T B$, $B^T BA$, $BB^T A^T$, które istnieją dla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zestaw 16.*odp. str. 83*

1. Funkcję wymierną $\frac{3}{x^4 + x}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

2. Wyrazić $\sin 5x$ przez $\sin x$ i $\cos x$.

3. Rozwiązać równanie $z^8 = (1 + i)^8$. Pierwiastki przedstawić w postaci algebraicznej.

4. Dwoma pierwiastkami wielomianu $z^5 - 5z^4 + 18z^3 - 18z^2 + 17z - 13$ są $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = i$. Znaleźć pozostałe pierwiastki wielomianu.

Zestaw 17.

odp. str. 83

1. Obliczyć $\sqrt[3]{i}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

2. Liczba $1 + 2i$ jest pierwiastkiem wielomianu $z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10$. Wyznaczyć pozostałe pierwiastki.

3. Obliczyć wyznacznik $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Narysować zbiór liczb zespolonych z spełniających warunek $\arg(iz^6) = \pi$.

Zestaw 18.

odp. str. 83

1. Obliczyć $\frac{(1-i)^{11}}{(\sqrt{3}+i)^6}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

2. Obliczyć $\sqrt{1+2i}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

3. Znaleźć pierwiastki wymierne wielomianu $4x^4 + x^2 - 3x + 1$.

4. Obliczyć $AA^T - 2BB^T$, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zestaw 19.

odp. str. 83

1. Naszkicować zbiór $\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|z-i|}{|z+i|} < 1, |z| \geq 2 \right\}$.

2. Wyrazić $\cos 5x$ przez $\sin x$, $\cos x$, wykorzystując wzór de Moivre'a.

3. Rozwiązać równanie $(z+1)^3 = (z-1)^3$.

4. Rozwiązać równanie macierzowe $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zestaw 20.

odp. str. 84

1. Rozwiązać równanie $|z|^6 = iz^6$, wykorzystując postać wykładniczą liczby zespolonej.

2. Funkcję wymierną $\frac{x^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

3. Obliczyć wyznacznik $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} [(z+i)^2] < 0\}$.

Zestaw 21.

odp. str. 84

1. Rozwiązać równanie $|z|z = iz^2$.

2. Liczba $\sqrt{3} - i$ jest jednym z pierwiastków 6-go stopnia liczby z . Obliczyć z . Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej elementy zbioru $\sqrt[6]{z}$.

3. Wiadomo, że wielomian $2z^3 - 3z^2 - 3z - 5$ ma pierwiastek wymierny nie mniejszy niż 1. Znaleźć pierwiastki wielomianu.

4. Rozwiązać równanie $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X$.

Zestaw 22.

odp. str. 84

1. Rozwiązać równanie $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ x & 1 & 0 & x^2 \end{vmatrix} = 18x$.

2. Dla jakich liczb naturalnych n liczba $(1-i)^n$ należy do prostej $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$?

3. Niech $z = 2 + i$ oraz $w = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. Obliczyć $\frac{z^3}{w^2 + 1}$.

4. Znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $z^{16} - z^5 + 3$ przez wielomian $z^2 + 1$, bez wykonywania dzielenia.

Zestaw 23.

odp. str. 84

1. Wielomian $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$ rozłożyć na czynniki (a) rzeczywiste, (b) zespolone, wiedząc, że ma on jeden pierwiastek dwukrotny, zaś część urojona innego jest ujemna.

2. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Macierz D

jest iloczynem jednej z nich oraz sumy pozostałych. Znaleźć macierz D .

3. Zbiór rozwiązań równania $(\bar{z})^5 - z = 0$ zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej.

4. Obliczyć iloczyn wszystkich pierwiastków 4 stopnia liczby 16.

Zestaw 24.

odp. str. 84

1. Czy liczba $z = \frac{2-i}{(\sqrt{3}+i)^5}$ należy do zbioru $\{z \in \mathbb{C} : \arg z < \arg(z^2)\}$?

Odpowiedź uzasadnić.

2. Obliczyć $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Liczba $i - 1$ jest pierwiastkiem wielomianu $z^4 + pz^2 + q$, gdzie p oraz q są współczynnikami rzeczywistymi. Znaleźć p i q .

4. Obliczyć $\sqrt[3]{-i}$.

Zestaw 25.

odp. str. 84

1. Sprawdzić, że i jest pierwiastkiem wielomianu $z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1$. Wyznaczyć pozostałe pierwiastki wielomianu.

2. Obliczyć i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiór $\sqrt[3]{-8i}$.

3. Obliczyć A^2 i A^3 dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Następnie znaleźć i uzasadnić wzór ogólny na A^n .

4. Narysować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = |i-z|\}$.

Zestaw 26.

odp. str. 85

1. Niech $z = (\sqrt{3} + i)^9 (1 - i)^5$. Obliczyć $|z|$ oraz $\arg z$.

2. Rozwiązać równanie $z^3 = -4\bar{z}$.

3. Znaleźć pierwiastki wielomianu $z^6 + z^4 + 2z^2 - 4$ i przedstawić je w postaci algebraicznej.

4. Rozwiązać równanie macierzowe $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

Zestaw 27.

odp. str. 85

1. Naszkicować zbiór $\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-1}{z-i} \right| > 1, \arg z < \pi \right\}$.
2. Obliczyć $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{11}$.
3. Liczba $1+i$ jest pierwiastkiem wielomianu $z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$. Znaleźć pozostałe pierwiastki wielomianu.
4. Rozwiązać równanie macierzowe $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Zestaw 28.

odp. str. 85

1. Rozwiązać równanie $z^2 - 3z + 3 + i = 0$.
2. Liczbę $\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}$ przedstawić w postaci algebraicznej.
3. Naszkicować zbiór $\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z^4) < \pi \}$.
4. Rozwiązać równanie macierzowe $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zestaw 29.

odp. str. 85

1. Naszkicować zbiór $\{ z \in \mathbb{C} : \sin(\pi|z-1|) > 0 \}$.
2. Rozwiązać równanie $z^3 = 2z\bar{z}$.
3. Jednym z pierwiastków wielomianu $az^3 + bz + 1$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, jest $1+i$. Znaleźć współczynniki a, b .
4. Funkcję wymierną $\frac{x}{x^3+1}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

Zestaw 30.

odp. str. 85

1. Obliczyć sumę $1 + \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{11}$ i otrzymany wynik przedstawić w postaci algebraicznej.
 2. Nie wykonując dzielenia, znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $x^{110} - 2x^{55} + 1$ przez wielomian $x^2 + 1$.
 3. Funkcję wymierną $\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.
-

4. Naszkicować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z + 1 - i| < 2, 0 \leq \operatorname{Im}(iz)\}$.

Zestaw 31.

odp. str. 86

1. Naszkicować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \geq 1, \arg z \geq 7\pi/4\}$.
2. Wykorzystując wzór de Moivre'a wyrazić $\operatorname{tg} 3x$ jako funkcję $\operatorname{tg} x$.
3. Znaleźć pierwiastki wielomianu $z^4 - z^3 - 2z^2 + 6z - 4$.
4. Funkcję wymierną $\frac{8x^2}{x^2 - 1}$ przedstawić w postaci sumy wielomianu i rzeczywistych ułamków prostych.

Zestaw 32.

odp. str. 86

1. Rozwiązać równanie $z^3 = 8(1 + i)^3$.
2. Narysować zbiór liczb zespolonych spełniających równanie $|z|^3 = \frac{z^3}{i}$.
3. Rozłożyć na czynniki liniowe wielomian $z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10$, jeżeli wiadomo, że $2 + i$ jest jednym z jego pierwiastków.
4. Funkcję wymierną $\frac{x}{x^4 - 1}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

Zestaw 33.

odp. str. 86

1. Znaleźć pierwiastki wielomianu $z^3 - z + 6$.
2. Obliczyć $(i - \sqrt{3})^{15}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.
3. Naszkicować zbiór $\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{4 + 3i}{2i - z}\right| \leq 5\right\}$.
4. Rozwiązać równanie $z^4 = -(\bar{z})^4$, korzystając z postaci wykładniczej liczby zespolonej. Narysować zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

Zestaw 34.

odp. str. 86

1. Obliczyć $\sqrt[3]{-64i}$. Podać interpretację geometryczną otrzymanego wyniku. Odpowiedź podać w postaci algebraicznej.
 2. Liczba i jest pierwiastkiem wielomianu $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$. Obliczyć pozostałe pierwiastki wielomianu.
 3. Obliczyć $(1 - i)^{26}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.
-

4. Narysować zbiór $\left\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z+4i}{-z} \right| > 1 \right\}$.

Zestaw 35.

odp. str. 88

1. Podać definicję pierwiastka stopnia n liczby zespolonej z . Obliczyć $\sqrt[4]{-4}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Podać wzór de Moivre'a i następnie obliczyć $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{77}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.
3. Znaleźć pierwiastki zespolone wielomianu $2z^3 - 3z^2 + 2z - 1$.
4. Narysować zbiór $\left\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z}{i} + 5 \right| > 3 \right\}$.

Zestaw 36.

odp. str. 88

1. Niech $z = (\sqrt{3} - i)^5$. Obliczyć $|z|$ oraz $\arg z$.
2. Jednym z pierwiastków czwartego stopnia liczby zespolonej w jest $\sqrt{2}i$. Znaleźć w oraz pozostałe pierwiastki.
3. Narysować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |3i + z| < 3\}$.
4. Jednym z pierwiastków wielomianu $z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 6z + 15$ jest liczba $-\sqrt{3}i$. Znaleźć pozostałe pierwiastki wielomianu.

Zestaw 37.

odp. str. 88

1. Rozwiązać równanie $\bar{z}z^4 = 32$.
2. Narysować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |2iz + 4| < 6, \arg z \leq 4\pi/3\}$. Opisać brzeg zbioru.
3. Znaleźć pierwiastki wielomianu $x^4 - x^2 - 6$.
4. Liczbę zespoloną $(2 - 2i)^{20}$ przedstawić w postaci algebraicznej.

Zestaw 38.

odp. str. 88

1. Rozwiązać równanie $(\bar{z})^2 = z^2$.
2. Narysować zbiór $\left\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-i}{\bar{z}-1} \right| \geq 1, \arg z > \frac{3\pi}{2} \right\}$. Opisać brzeg zbioru.
3. Wyznaczyć pierwiastki wielomianu $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$.

4. Liczbę zespoloną $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{15}$ przedstawić w postaci algebraicznej.

Zestaw 39.*odp. str. 89*

1. Rozwiązać równanie $(\bar{z})^3 = (1-i)^2$.
2. Narysować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z+4| \leq 6, \arg z > \pi\}$. Opisać brzeg zbioru.
3. Znaleźć pierwiastki wielomianu $x^6 - 2x^4 + 4x^2 - 8$.
4. Liczbę zespoloną $\frac{(\sqrt{3}i+1)(-1-i\sqrt{3})}{1-i}$ przedstawić w postaci algebraicznej.

Zestaw 40.*odp. str. 89*

1. Rozwiązać równanie $(\bar{z})^3 - i\bar{z} = 0$.
 2. Narysować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |iz-2| \leq 6, \arg z < 7\pi/6\}$. Opisać brzeg zbioru.
 3. Wyznaczyć pierwiastki wielomianu $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.
 4. Liczbę zespoloną $\left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right)^{25}$ przedstawić w postaci algebraicznej.
-