

**ANALIZA
MATEMATYCZNA 2**

Opracowanie
Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Kolokwia i egzaminy

Wydanie dwunaste powiększone



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2025

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1997 – 2025 by Marian Gewert and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład książki wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978-83-67234-18-4

Wydanie XII powiększone, Wrocław 2025
Oficina Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp	7
Zestawy zadań z kolokwiów	9
Kolokwium pierwsze	9
Kolokwium drugie	28
Zestawy zadań z egzaminów	47
Egzamin podstawowy	47
Egzamin poprawkowy	74
Odpowiedzi i wskazówki	102
Kolokwium pierwsze	102
Kolokwium drugie	107
Egzamin podstawowy	115
Egzamin poprawkowy	123
Tematyczne zestawienie zadań	133
Całki niewłaściwe	133
Szeregi liczbowe i potęgowe	134
Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych	135
Całki podwójne	138
Całki potrójne	139

Wstęp

Zbiór zadań „*Kolokwia i egzaminy*” jest trzecią częścią zestawu podręczników do Analizy matematycznej 2. Pozostałymi częściami zestawu są „*Definicje, twierdzenia, wzory*” oraz „*Przykłady i zadania*”. Zbiór zawiera zestawy zadań, które w ubiegłych latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na kolokwiach i egzaminach z Analizy matematycznej 2. Zadania z tych sprawdzianów obejmują całki niewłaściwe, szeregi liczbowe i potęgowe oraz rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych wraz z zastosowaniami w fizyce i technice. Do zestawów kolokwialnych i egzaminacyjnych o numerach nieparzystych podane są odpowiedzi.

Opracowanie pozwala studentom zapoznać się z rodzajami oraz stopniem trudności zadań kolokwialnych i egzaminacyjnych. Jest to jednocześnie dodatkowy materiał do samodzielnej nauki. Zestawy zadań z tego zbioru mogą być wykorzystywane przez prowadzących ćwiczenia na kolokwiach, a przez wykładowców na egzaminach.

Studentów Politechniki Wrocławskiej zainteresowanych udziałem w konkursie matematycznym „Egzamin na ocenę celującą” zachęcamy do zapoznania się z książką pt. „*Studencki konkurs matematyczny*”. To opracowanie zawiera zadania wraz z rozwiązaniami z konkursów, które odbyły się w latach 1994 – 2021.

Obecne wydanie rozszerzyliśmy o tematyczny zestaw zadań. Do każdego tematu z zakresu kursu analizy matematycznej 2 przypisaliśmy odpowiednie zadania z zestawów kolokwialnych i egzaminacyjnych. Wykaz ten pozwala szybko wybrać zadania z kolokwioów i egzaminów na zadany temat.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za zestawy zadań z kolokwioów i egzaminów, a także za uwagi o poprzednich wydaniach.

Marian Gewert

Zbigniew Skoczylas

Zestawy zadań z kolokwiów[#]

Kolokwium pierwsze

Zestaw 1.

odp. str. 102

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}$.
2. Funkcję $f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2$ rozwinąć w szereg Maclaurina i określić jego promień zbieżności.
3. Uzasadnić, że figura D ograniczona krzywą $y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}$ oraz prostymi: $x = \pi$, $y = 0$ ma skończone pole.
4. Niech $f(x, y, z) = e^{z-xy}$. Narysować zbiór punktów $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ spełniających warunek $f(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z)$.
5. Obliczyć granicę $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}$, gdzie $a > 0$.

Zestaw 2.

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{n} \right)^n$.
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+5)^n}{n+30}$.

[#] Od roku akademickiego 2000/2001 na obu kolokwiach studenci otrzymują do rozwiązania w czasie 60 minut po 4 zadania.

3. Uzasadnić, że granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ nie istnieje.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$.

5. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_1^\infty \sqrt{e^{-x}} dx$.

Zestaw 3.

odp. str. 102

1. Niech $f(x, y, z) = e^{z+xy}$. Narysować zbiór punktów $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ spełniających warunek $f(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}(x, y, z)$.

2. Funkcję $f(x) = \ln(1 + 3x + 2x^2)$ rozwinąć w szereg Maclaurina i określić jego promień zbieżności.

3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 3^n$.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^\infty \frac{x dx}{x^3 + 1}$.

5. Zbadać, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} xy}{x} & \text{dla } x \neq 0, y \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{dla } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0, 0)$.

Zestaw 4.

1. Sformułować warunek konieczny zbieżności szeregów i na tej podstawie uzasadnić równość $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100}}{3^n} = 0$.

2. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{(n+1)5^n}$.

3. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{e^x + 1}{e^{3x} + 2} dx$.

5. Obliczyć granicę $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,0)} \frac{\sin(xy)}{y^3}$.

Zestaw 5.*odp. str. 103*

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_{2\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n}\right)^n n!$.

3. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji $f(x) = x^2 e^{-x}$ i określić przedział zbieżności tego szeregu.

4. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n^2 + 1}$.

5. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$.

Zestaw 6.

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{7^n - 5^n}$.

2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$.

3. Zbadać, czy funkcja określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ma pochodną cząstkową $f''_{yx}(0, 0)$.

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} (2-x)^n$.

5. Promień podstawy stożka zmierzony z dokładnością 1 cm wynosi 3 m, a jego wysokość zmierzona z dokładnością 2 cm wynosi 4 m. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole powierzchni bocznej tego stożka?

Zestaw 7.*odp. str. 103*

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_{\frac{3}{2}}^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.
2. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n + 5^n}$.
3. Uzasadnić równość $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{50^n}{n!} = 0$. Wykorzystać warunek konieczny zbieżności szeregów.
4. Sformułować kryterium całkowe zbieżności lub rozbieżności szeregów. Korzystając z tego kryterium zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 8}$.
5. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{12^n} (x+3)^n$.

Zestaw 8.

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n^2 - 1}$.
2. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$.
3. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$.
4. Zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, jeżeli
$$f(x,y) = \sqrt[5]{x^{10} - 32y^5}.$$
5. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{1.01^3 - 2.98^2}{1.01^3 + 2.98^2}.$$

Zestaw 9.

odp. str. 103

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x\sqrt[3]{x}} dx$.

2. Uzasadnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{n^3}$.

3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{ax^2 + 3y^2}{x^2 + 2y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ a & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.

4. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1, 1, z_0)$ do wykresu funkcji

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

5. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$.

Zestaw 10.

1. Obliczyć pole figury D ograniczonej wykresem funkcji

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} |x|}{x^2 + 1}$$

i jej asymptotą w ∞ .

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{\cos \frac{1}{n}}$. Sformułować wykorzystane kryteria.

3. Funkcję $f(x) = \frac{x}{3x-1}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Podać przedział zbieżności otrzymanego szeregu.

4. Uzasadnić, że granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x+y-3}{x^2+y^2-5}$ nie istnieje.

5. Równanie stanu gazu doskonałego ma postać $p = \frac{RT}{V}$, gdzie: p oznacza ciśnienie, T – temperaturę, V – objętość, R – stałą gazową. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć, jak należy zmienić objętość gazu przy wzroście temperatury o 2%, aby jego ciśnienie nie uległo zmianie.

Zestaw 11.

odp. str. 103

1. Uzasadnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_2^{\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^4 + \sin x} dx$.
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{n^2 + 1}$.
3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ a & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.
4. Korzystając z różniczki funkcji dwóch zmiennych obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $0.97^{1.05} + 1.05^{0.97}$.
5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6 \ln x$.

Zestaw 12.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$. Sformułować wykorzystane kryteria lub definicje.
2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n-1}}{n4^n}$. Podać wykorzystane kryteria.
3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} x^{2n}$.
4. Wyznaczyć i narysować dziedzinę funkcji
$$f(x, y) = \ln \frac{x^2 + y^2 + 2y}{x + y}$$
oraz jej poziomice dla poziomu $h = 0$.
5. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji
$$f(x, y) = \arcsin \frac{xy}{x + y}$$

w punkcie $(0, 1)$ w kierunku wektora nachylonego pod kątem α do dodatniej części osi Ox . Dla jakiego kąta α , pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość najmniejszą?

Zestaw 13.

odp. str. 103

1. Uzasadnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{x+1}{4x^3 + \sqrt{x}} dx$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}$.

3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ a & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.

4. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y, z) = \ln(x + y^2 + z^3)$ w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1)$ w kierunku wektora $\mathbf{v} = (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$.

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^2y + \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$.

Zestaw 14.

1. Obliczyć pole figury D ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, gdzie $x \geq 0$ oraz jej asymptotą w ∞ .

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$. Sformułować wykorzystane kryteria.

3. Wyznaczyć zbiór punktów nieciągłości funkcji f określonej wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \arcsin(x^2 + y^2) & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \frac{\pi}{2} \cos xy & \text{dla } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

4. Uzasadnić równość $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$.

5. Obliczyć pochodne cząstkowe F'_u, F'_v funkcji określonej wzorem

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)),$$

gdzie funkcja f ma ciągle pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na $\mathbb{R}^2$ oraz

$$x = \arctg \frac{v}{u}, \quad y = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Wyrazić f'_x, f'_y za pomocą pochodnych cząstkowych F'_u, F'_v oraz zmiennych u i v .

Zestaw 15.

odp. str. 104

1. Uzasadnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{2 - \sin x}{2 + \sin x} e^{-3x} dx$.
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 + 2}$.
3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(ax^2 + y^2)}{2x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.
4. Niech $u(x, y) = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$, gdzie f jest dowolną funkcją jednej zmiennej mającą ciągłą pochodną. Sprawdzić równość $xu'_x + yu'_y = xy + u$.
5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 54 \ln y$.

Zestaw 16.

1. Z badać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{\arctg^2 x}{x^2 \sqrt{x}} dx$.
2. Z badać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{n+1}{n^2}$.
3. Wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)3^n}$.
4. W celu wyznaczenia przenikalności elektrycznej polietylenu zmierzono pojemność oraz wymiary kondensatora płaskiego o izolacji polietylenowej uzyskując następujące wyniki: pojemność $C = (3 \pm 0.2) \cdot 10^{-9}$ F, powierzchnia okładzin $S = (150 \pm 10) \cdot 10^{-4}$ m², grubość izolacji $d = (0.1 \pm 0.01) \cdot 10^{-3}$ m. Z jaką dokładnością można obliczyć przenikalność dielektryczną polietylenu używając wzoru $\varepsilon = \frac{Cd}{S}$?
5. Podać definicję pochodnej kierunkowej funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wektora $\mathbf{v}$. Obliczyć $f'_v(0, 0)$ dla funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$ oraz wektora $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$. W jakim kierunku pochodna ta jest największa?

Zestaw 17.

odp. str. 104

1. Niech $g(u, v)$ będzie funkcją o ciągłych pochodnych cząstkowych drugiego rzędu spełniającą równanie $g''_{uu} + g''_{vv} = 0$. Pokazać, że funkcja

$$f(x, y) = g(x^2 - y^2, 2xy)$$

spełnia równanie $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$.

2. Funkcję $f(x) = \frac{x}{1 - x - 2x^2}$ rozwinąć w szereg Maclaurina i określić przedział jego zbieżności.

3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3}}$.

4. Pokazać, że funkcja f określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0, 0)$. Obliczyć pochodne cząstkowe $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$.

5. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ wokół osi Ox .

Zestaw 18.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x^2}{(x+1)^2} dx$.

2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu lub różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{ne^n}$.

3. Określić dziedzinę funkcji

$$f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2).$$

Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszkicować poziomice wykresu funkcji f .

4. Zbadać, czy istnieje granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

5. Wyznaczyć wektor $\mathbf{v}$ wskazujący kierunek, dla którego pochodna kierunkowa $f_{\mathbf{v}}(2, 1)$ funkcji $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$ ma wartość 0.

Zestaw 19.

odp. str. 104

1. Niech $f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, gdzie $g(r)$ jest funkcją jednej zmiennej dwukrotnie różniczkowalną. Sprawdzić, że zachodzi równość

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr}.$$

2. Uzasadnić równość $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$

3. Sprawdzić, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2} & \text{dla } |x| \neq |y|, \\ 0 & \text{dla } |x| = |y| \end{cases}$$

ma pochodne cząstkowe $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)^2}.$

5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + 2}}.$

Zestaw 20.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^2 \frac{\cos x}{\sqrt{2-x}} dx.$

2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu lub różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(1-e)^{n-1}}.$

3. Określić dziedzinę funkcji $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - 1}$. Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszkicować poziomice wykresu funkcji f .

4. Zbadać, czy istnieje granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2 x}{xy}.$

5. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(0, 1, z_0)$ do wykresu funkcji

$$z = \frac{\operatorname{arctg} y}{1 + x^2}.$$

Zestaw 21.*odp. str. 104*

1. Niech g i h będą funkcjami jednej zmiennej dwukrotnie różniczkowalnymi.

Uzasadnić, że funkcja $f(x, y) = \frac{x}{y}h(x) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ spełnia równanie

$$xy f''_{xy} + y^2 f''_{yy} + x f'_x + 2y f'_y = 0.$$

2. Pokazać, że funkcja f określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ma obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $(0, 0)$.

3. Funkcję $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ rozwinąć w szereg Maclaurina oraz określić przedział jego zbieżności.

4. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$.

5. Zbadać zbieżność warunkową szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+5}$.

Zestaw 22.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx$.

2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu lub różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1-e)^n}$.

3. Określić dziedzinę funkcji

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1).$$

Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszkicować poziomice wykresu funkcji f .

4. Zbadać, czy istnieje granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

5. Wiedząc, że funkcja f ma ciągle pochodne cząstkowe drugiego rzędu, znaleźć pochodne h'_x oraz h''_{zx} funkcji $h(x, y, z) = xf(yz, xz)$.

Zestaw 23.

odp. str. 105

1. Niech p i q będą funkcjami jednej zmiennej dwukrotnie różniczkowalnymi. Uzasadnić, że funkcja $f(x, y) = xp\left(-\frac{y}{x}\right) + q\left(\frac{x}{y}\right)$ spełnia równanie

$$x^2 f''_{xx} + 2xy f''_{xy} + y^2 f'_y = 0.$$

2. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x^3 + 1}$.

3. Zbadać, czy istnieje pochodna cząstkowa $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

4. Zbadać zbieżność warunkową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

5. Wykorzystując rozwinięcie funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ wyznaczyć szereg Mac-laurina funkcji $g(x) = \ln(1+3x+2x^2)$ oraz określić przedział jego zbieżności.

Zestaw 24.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{(x+2)^2} dx$.

2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu lub różniczkowaniu szeregów potęg-owych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} \frac{1}{n(n+1)}$.

3. Określić dziedzinę funkcji

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}.$$

Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszki-cować poziomice wykresu funkcji f .

4. Zbadać, czy istnieje granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy^2}$.

5. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1, \sqrt{3}, z_0)$ do wykresu funkcji $z = \arctg \frac{x}{y}$.

Zestaw 25.

odp. str. 105

1. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^n}$.

2. Zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ funkcji określonej wzorem $f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 - 8y^3}$.

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_1^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right) dx$.

4. Napisać rozwinięcie funkcji $f(x) = \frac{x}{x+2}$ w szereg Taylora o środku $x_0 = 3$.

5. Zbadać, czy istnieje granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}$.

Zestaw 26.

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}$, gdzie $a < b$. Czy całka $\int_{-\infty}^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}$ jest zbieżna?

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite k , dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k}$ jest zbieżny.

3. Wyznaczyć zbiór liczb rzeczywistych x , dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{(x+1)^n}$ jest zbieżny.

4. Niech $f(x, y, z) = e^{xy-z}$. Znaleźć i naszkicować zbiór punktów $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dla których $f(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}(x, y, z)$.

5. Przy pomocy różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\ln 1.02 \cdot \sin 358^\circ$.

Zestaw 27.

odp. str. 105

1. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = x^2 + y^2$, która jest równoległa do płaszczyzny $3x - 6y + 2z - 17 = 0$.

2. Korzystając z twierdzeń o szeregach uzasadnić równość $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$. Sformułować wykorzystane twierdzenia.

3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{3^n + 2^n}$.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{9-x^2}}$.

5. Znaleźć punkty ciągłości funkcji f określonej wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{dla } y \leq x^2, \\ 2x - 1 & \text{dla } y > x^2. \end{cases}$$

Zestaw 28.

1. W zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ zbadać ciągłość funkcji f określonej wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{dla } y \geq 0, \\ \alpha & \text{dla } y < 0. \end{cases}$$

Sprawdzić, czy zbiór punktów ciągłości funkcji f jest otwarty.

2. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do wykresu funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y}{x + y + 1}$$

w punktach jego przecięcia prostą $x = y = z$.

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin x^2}{x^4} dx$ w zależności od rzeczywistego parametru α .

4. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{3n}}{2^{5n+2}}$.

5. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (2n)!}{(n+1)!}$.

Zestaw 29.

odp. str. 105

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 5}$.
2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.
3. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1, -\sqrt{3}, z_0)$ do wykresu funkcji $z = \arctg \frac{x}{y}$.
4. Funkcję $f(x) = \frac{x}{3x+1}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności otrzymanego szeregu.
5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{5^n + 3^n}$.

Zestaw 30.

1. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n+2} \right)$.
2. Wyznaczyć zbiór liczb rzeczywistych x , dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n! \cos n\pi}{n^n}$ jest zbieżny warunkowo.
3. Dla funkcji $f(x, y) = \sqrt{\ln \frac{x}{y} - 1}$ wyznaczyć i naszkicować zbiór punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających warunek $f_y(x, y) < 0$.
4. Przy pomocy różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{(5.1)^2 \cdot (2.9)^2}{1 + (2.9)^2}.$$
5. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin 3x \, dx$.

Zestaw 31.

odp. str. 106

1. Sformułować kryterium całkowe zbieżności szeregów. Korzystając z tego kryterium zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 + 2}$.

2. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}$ wokół osi Ox . Sporządzić rysunek.

3. Korzystając z twierdzeń o szeregach uzasadnić równość $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n3^n}$.

5. Niech $f(x, y) = \ln(x^2 + 3y)$. Obliczyć f'''_{xy} .

Zestaw 32.

1. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{(n+1)^2}$.

2. Dla jakich wartości parametru $0 \leq \alpha < 2$ całka $\int_{\alpha}^2 \frac{dx}{x \ln x}$ jest zbieżna?

3. Wyznaczyć zbiór liczb $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(10x)^n}{2^n + 5^n}$ jest rozbieżny.

4. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do wykresu funkcji $z = \ln \frac{x^2}{y}$ w punktach $(1, y_1, 1)$, $(1, -1, z_2)$.

5. Znaleźć i naszkicować dziedzinę naturalną funkcji $f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ oraz jej poziomice odpowiadające poziomom $h = 0$ i $h = \sqrt{3}$. Czy funkcja f jest ciągła w punkcie $(0, 1)$?

Zestaw 33.

odp. str. 106

1. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ wokół osi Ox .

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)3^n}$.

3. Określić i naszkicować dziedzinę funkcji $f(x, y) = \ln \frac{x+1}{y}$.

4. Zbadać, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & \text{dla } x \neq 0, y \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{dla } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0, 0)$.

5. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji

$$f(x, y) = e^{2y-x^3}.$$

Czy pochodne cząstkowe mieszane są równe?

Zestaw 34.

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n}$.

2. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji $f(x) = xe^{-x^2}$ i na tej podstawie obliczyć $f^{(7)}(0)$.

3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{x \, dx}{\sqrt[3]{x^6 + 2x^2}}.$$

4. Wyznaczyć i narysować dziedzinę funkcji $f(x, y) = \arcsin \sqrt{x - \sqrt{y}}$. Do jakich klas zbiorów można zaliczyć otrzymaną dziedzinę?

5. Zbadać, czy istnieje granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$.

Zestaw 35.

odp. str. 106

1. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y\sqrt[3]{x} = 3$, gdzie $0 < x \leq 1$, wokół osi Ox .

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$.

3. Określić i naszkicować dziedzinę funkcji $f(x, y) = \sqrt{\frac{x-2}{y}}$.

4. Zbadać, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{3y} & \text{dla } x \in \mathbb{R}, y \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R}, y = 0 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0, 0)$.

5. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$$

Czy pochodne cząstkowe mieszane są równe?

Zestaw 36.

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

3. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$ i jego promień zbieżności.

4. Wyznaczyć zbiór punktów ciągłości funkcji f określonej wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin xy & \text{dla } x \neq y, \\ 0 & \text{dla } x = y. \end{cases}$$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe u'_y , u'_z funkcji $u(x, y, z) = (x + z^2)^{\sqrt{yz}}$.

Zestaw 37.

odp. str. 106

1. Czy bryła V ograniczona powierzchnią powstałą przez obrót krzywej

$$y = \frac{1}{\sqrt{4-x}},$$

gdzie $0 \leq x < 4$, wokół osi Ox ma skończoną objętość?

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{n^2 + 1}$.

3. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = xe^{-x^2}$. Wykorzystując otrzymane rozwinięcie obliczyć $f^{(5)}(0)$.

4. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(2, 1, z_0)$ do wykresu funkcji

$$z = y \ln(2 + x^2 y - y^2).$$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe mieszane rzędu drugiego funkcji

$$f(x, y) = \sin x^2 y + \frac{\sqrt{x}}{y}.$$

Czy otrzymane pochodne są równe?

Zestaw 38.

1. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha\sqrt{x^2 + y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 4, \\ 8 - (x^2 + y^2) & \text{dla } x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

jest ciągła? Narysować wykres tej funkcji.

2. Obliczyć granicę $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$.

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$.

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\ln n}$.

5. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)^{2n}}{(n^3+1)^n}$.

Zestaw 39.

odp. str. 107

1. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y = 1/\sqrt{3+x^2}$ wokół osi Ox .

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n^3}$.

3. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = x^2 \cos 2x$. Wykorzystując otrzymane rozwinięcie obliczyć $f^{(4)}(0)$.

4. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1, 0, z_0)$ do wykresu funkcji

$$z = xe^{4xy-y^2}.$$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe mieszane rzędu drugiego funkcji

$$f(x, y) = \cos xy^2 - \frac{x}{\sqrt{y}}.$$

Czy otrzymane pochodne są równe?

Zestaw 40.

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{1}{4^n}$.

2. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$.

4. Wyznaczyć i naszkicować poziomice oraz wykres funkcji $g(x, y) = -x - y^2$.

5. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(2, 1, z_0)$ do wykresu funkcji $z = x^{xy}$