

ANALIZA
MATEMATYCZNA 1

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Przykłady i zadania

Wydanie trzydzieste pierwsze zmienione



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2025

Marian Gewert

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:

IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1992 – 2025 by Marian Gewert and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto, utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978–83–67234–22–1

Wydanie XXXI zmienione, Wrocław 2025
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy Sp. Kom.

Spis treści

Wstęp	7
1. Funkcje	9
1.1. Podstawowe określenia	9
1.2. Funkcje monotoniczne	12
1.3. Złożenie funkcji	14
1.4. Funkcje odwrotne	16
1.5. Funkcje elementarne i inne	19
2. Ciągi liczbowe	22
2.1. Podstawowe określenia	22
2.2. Granice ciągów	29
2.3. Twierdzenia o granicach ciągów	31
3. Granice i ciągłość funkcji	45
3.1. Definicje granic funkcji	45
3.2. Twierdzenia o granicach funkcji	48
3.3. Asymptoty funkcji	64
3.4. Ciągłość funkcji	72
3.5. Twierdzenia o funkcjach ciągłych	79
4. Pochodne funkcji	87
4.1. Podstawowe pojęcia	87
4.2. Pochodne jednostronne i pochodne niewłaściwe	90
4.3. Twierdzenia o pochodnej funkcji	95
4.4. Różniczka funkcji	108
4.5. Pochodne wyższych rzędów	111
4.6. Pochodne funkcji wektorowych	117

5. Zastosowania pochodnych	120
5.1. Twierdzenia o wartości średniej	120
5.2. Twierdzenia o granicach nieoznaczonych	131
5.3. Wzory Taylora i Maclaurina	139
5.4. Ekstrema funkcji	147
5.5. Funkcje wypukłe i punkty przegięcia wykresu funkcji	155
5.6. Badanie funkcji	160
6. Całki nieoznaczone	177
6.1. Całki nieoznaczone	177
6.2. Twierdzenia o całkach nieoznaczonych	179
6.3. Całkowanie funkcji wymiernych	189
6.4. Całkowanie funkcji trygonometrycznych	199
6.5. Całkowanie funkcji z niewymiernościami	206
7. Całki oznaczone	212
7.1. Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego	212
7.2. Metody obliczania całek oznaczonych	217
7.3. Twierdzenia o całkach oznaczonych	222
8. Zastosowania całek oznaczonych	226
8.1. Zastosowania w geometrii	226
8.2. Zastosowania w fizyce	243
Zbiory zadań	246

Wstęp

Komplet podręczników do Analizy matematycznej 1 składa się z trzech części. Pierwszą z nich jest książka *„Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory”*, drugą – niniejszy zbiór zadań, a ostatnią – opracowanie *„Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy”*. Książki są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać również studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów, a także uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych oraz wojskowych.

Zbiór zawiera przykładowe zadania z rozwiązaniami przedstawionymi „krok po kroku”, przy czym rozwiązania poprzedzone są krótkimi wprowadzeniami teoretycznymi. Ponadto, umieszczono w nim podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Bezpośrednio za zadaniami podano wskazówki do rozwiązań i odpowiedzi. Przykłady i zadania obejmują rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej wraz z zastosowaniami. Obszerny materiał teoretyczny, którego znajomość jest potrzebna do rozwiązywania zadań, można znaleźć w pierwszej części zestawu. Zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze i skierowane do ambitnych studentów. Zadania ze sprawdzianów przeprowadzonych w poprzednich latach w Politechnice Wrocławskiej zawiera trzecia część zestawu. Więcej trudnych i nietypowych zadań Czytelnik znajdzie w książce *„Studencki konkurs matematyczny”*.

Uzupełnieniem zestawu podręczników do Analizy matematycznej 1 jest książka pt. *„Przykłady i kontrprzykłady z analizy matematycznej”*. Publikacja ta, przeznaczona dla ambitnych studentów, zawiera m.in. przykłady ciągów, funkcji, granic, szeregów, całek itp. o nieoczekiwanych własnościach oraz kontrprzykłady świadczące, że nie można osłabić założeń klasycznych twierdzeń analizy.

W obecnym wydaniu przeredagowano rozwiązania kilkunastu przykładów. Usunięto zaś przykłady i zadania uciążliwe rachunkowo. Poprawiono także zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o zbiorze.

Marian Gewert

Zbigniew Skoczylas



1. Funkcje

1.1. Podstawowe określenia

PRZYKŁAD 1.1. Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}; & \text{(b)} \quad g(x) &= \sqrt{16 - x^4}; \\ \text{(c)} \quad h(x) &= \frac{1}{\log(2x^2 - x)}; & \text{(d)} \quad r(x) &= \operatorname{tg} \left[\pi \left(x + \frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Dziedziną naturalną funkcji określonej wzorem $f(x)$ nazywamy zbiór D_f liczb rzeczywistych x , dla których można wyznaczyć $f(x)$.

(a) Dziedzina funkcji f jest określona przez warunki $x \geq 0$ oraz $x^2 - 4 \neq 0$. Ponieważ

$$x^2 - 4 \neq 0 \iff x^2 \neq 4 \iff (x \neq -2) \wedge (x \neq 2),$$

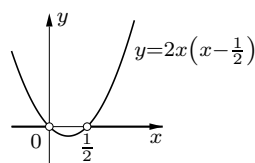
więc $D_f = [0, \infty) \setminus \{2\} = [0, 2) \cup (2, \infty)$.

(b) Dziedzina funkcji g jest określona przez warunek $16 - x^4 \geq 0$. Ponieważ

$$16 - x^4 = (4 - x^2)(4 + x^2).$$

oraz $4 + x^2 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc nierówność $16 - x^4 \geq 0$ jest równoważna nierówności $4 - x^2 \geq 0$, czyli $x^2 \leq 4$. Zatem $D_g = [-2, 2]$.

(c) Dziedzina funkcji h jest określona przez warunki $2x^2 - x > 0$ oraz $\log(2x^2 - x) \neq 0$. Pierwsza nierówność jest równoważna nierówności $2x(x - 1/2) > 0$, której rozwiązaniem jest zbiór $(-\infty, 0) \cup (1/2, \infty)$ (rysunek). Z kolei drugi warunek można zapisać w postaci



$$2x^2 - x - 1 \neq 0 \iff 2(x - 1) \left(x + \frac{1}{2} \right) \neq 0 \iff (x \neq 1) \wedge \left(x \neq -\frac{1}{2} \right).$$

Zatem $D_h = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$.

■ (d) Funkcja $\operatorname{tg} u$ jest określona dla $u \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Zatem funkcja r jest określona dla $\pi(x + 1/2) \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Stąd otrzymamy $x \neq k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Dziedzina naturalna funkcji r ma postać $D_r = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

■ **ZADANIE 1.1.** Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \sqrt{\sin x}; & \text{(b)} \quad g(x) &= \frac{1}{1 + \cos x}; & \text{(c)} \quad h(x) &= \frac{x^3 - 1}{x - 1}; \\ \text{(d)} \quad p(x) &= \log_3(2 - |x|); & \text{(e)} \quad q(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}; & \text{(f)} \quad r(x) &= \frac{2^x}{2^x - 4}. \end{aligned}$$

Odpowiedzi. ■ (a) $D_f = \dots \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \dots$; ■ (b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; ■ (c) $D_h = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; ■ (d) $D_p = (-2, 2)$; ■ (e) $D_q = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; ■ (f) $D_r = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

■ **PRZYKŁAD 1.2.** Określić, czy podane funkcje są parzyste (nieparzyste):

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= |x|(x^4 + 2); & \text{(b)} \quad g(x) &= x \sin x; \\ \text{(c)} \quad h(x) &= \frac{1}{3^x - 3^{-x}}; & \text{(d)} \quad p(x) &= \log_2 \frac{5 - x}{5 + x}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest parzysta (nieparzysta), jeżeli dla każdego $x \in X$ także $-x \in X$ oraz $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). Pierwszy z warunków oznacza, że zbiór X jest symetryczny względem 0, a drugi, iż oś Oy (początek układu współrzędnych) jest osią (środkiem) symetrii wykresu funkcji f .

■ (a) Dziedziną funkcji f jest $\mathbb{R}$, czyli zbiór symetryczny względem 0. Ponadto, dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$f(-x) = |-x|((-x)^4 + 2) = |-1||x|((-1)^4 x^4 + 2) = |x|(x^4 + 2) = f(x).$$

To oznacza, że funkcja f jest parzysta.

■ (b) Dziedziną funkcji g jest $\mathbb{R}$, czyli zbiór symetryczny względem 0. Ponadto, wobec faktu, iż funkcja $\sin x$ jest nieparzysta, mamy

$$g(-x) = (-x) \sin(-x) = -x(-\sin x) = g(x).$$

Zatem funkcja g jest parzysta.

■ (c) Dziedziną funkcji h jest zbiór rozwiązań nierówności $3^x - 3^{-x} \neq 0$, która jest równoważna warunkowi $3^x \neq 3^{-x}$, a dalej warunkowi $x \neq 0$. Zatem

dziedziną funkcji h jest zbiór $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ – symetryczny względem 0. Ponadto, dla każdego x z tego zbioru mamy

$$h(-x) = \frac{1}{3^{-x} - 3^x} = \frac{1}{-(-3^{-x} + 3^x)} = -\frac{1}{3^x - 3^{-x}} = -h(x).$$

To oznacza, że funkcja h jest nieparzysta.

■ (d) Warunek określający dziedzinę funkcji p ma postać

$$\frac{5-x}{5+x} > 0.$$

Jest on równoważny nierówności $(5-x)(5+x) > 0$, rozwiązaniem której jest zbiór $(-5, 5)$ – symetryczny względem 0. Korzystając teraz ze wzoru $\log_a b^c = c \log_a b$, gdzie $a, b > 0$, $a \neq 1$, $c \in \mathbb{R}$, mamy dla $x \in (-5, 5)$

$$p(-x) = \log_2 \frac{5-(-x)}{5+(-x)} = \log_2 \frac{5+x}{5-x} = \log_2 \left(\frac{5-x}{5+x} \right)^{-1} = -\log_2 \frac{5-x}{5+x} = -p(x).$$

Zatem funkcja p jest nieparzysta.

■ **ZADANIE 1.2.** Określić, czy podane funkcje są parzyste (nieparzyste):

- (a) $f(x) = \frac{1+|x|}{2-|x|}$; (b) $g(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}$;
 (c) $h(x) = 2^x + 2^{-x}$; (d) $q(x) = x^2 \operatorname{ctg} x$.

Odpowiedzi. ■ (a), (c) – parzysta; ■ (b), (d) – nieparzysta.

■ **PRZYKŁAD 1.3.** Uzasadnić, że podane funkcje są okresowe oraz znaleźć ich podstawowe okresy:

- (a) $g(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$; (b) $h(x) = \sin 2x + 3 \cos \frac{x}{2}$; (c) $k(x) = \sin^2 x$.

Rozwiązanie. Funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest okresowa, jeżeli istnieje liczba dodatnia T taka, że dla każdego $x \in X$ także $x \pm T \in X$ oraz $f(x+T) = f(x)$. Liczbę T nazywamy okresem funkcji f . Jeżeli istnieje najmniejszy okres funkcji, to nazywamy go okresem podstawowym.

■ (a) Dziedzinę funkcji g określają warunki $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) oraz $\operatorname{ctg} x \geq 0$. Zatem

$$D_g = \dots \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right] \cup \dots$$

Liczba dodatnia T jest okresem funkcji g , jeżeli dla każdego $x \in D_g$ mamy

$$g(x+T) = \sqrt{\operatorname{ctg}(x+T)} = \sqrt{\operatorname{ctg} x} = g(x).$$

Warunek ten jest równoważny warunkowi $\operatorname{ctg}(x+T) = \operatorname{ctg} x$, a dalej równości $x+T = x+k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). To oznacza, że okresem funkcji g jest $T = k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$), a okresem podstawowym $T = \pi$. Łatwo zauważyć, że jeżeli $x \in D_g$, to również $x \pm \pi \in D_g$.

■ (b) Dziedziną funkcji h jest $\mathbb{R}$. Zauważmy, że funkcja $\sin 2x$ ma okres podstawowy $T_1 = \pi$, a funkcja $\cos \frac{x}{2}$ – $T_2 = 4\pi = 4T_1$. Zatem $T = 4\pi$ jest okresem podstawowym funkcji h .

■ (c) Dziedziną funkcji k jest $\mathbb{R}$. Liczba dodatnia T jest okresem funkcji k , jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$k(x+T) = \sin^2(x+T) = \sin^2 x = k(x).$$

Warunek ten jest równoważny warunkom

$$\sin(x+T) = \sin x \quad \text{lub} \quad \sin(x+T) = -\sin x.$$

Z pierwszej równości mamy

$$x+T = x+2k\pi \quad \text{lub} \quad x+T = \pi - x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

a drugiej

$$x+T = -x + 2l\pi \quad \text{lub} \quad x+T = \pi + x + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$$

Wyznaczając stąd T mamy kolejno $T = 2k\pi$, $T = -2x + (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) oraz $T = -2x + 2l\pi$, $T = (2l+1)\pi$ ($l \in \mathbb{N}$). Zatem każda liczba postaci $T = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) oraz $T = (2l+1)\pi$ ($l \in \mathbb{N}$) jest okresem badanej funkcji. Stąd $T = \pi$ jest okresem podstawowym.

■ **ZADANIE 1.3.** Uzasadnić, że podane funkcje są okresowe oraz znaleźć ich podstawowe okresy:

(a) $f(x) = |\cos 2x|$; (b) $g(x) = \sqrt{\operatorname{tg} \pi x}$;

(c) $h(x) = 1 + \sin 3x \cos x$; (d) $p(x) = (-1)^{\lfloor 3x \rfloor}$.

Odpowiedzi. ■ (a) $T = \frac{\pi}{2}$; ■ (b) $T = 1$; ■ (c) $T = 2\pi$; ■ (d) $T = \frac{2}{3}$.

1.2. Funkcje monotoniczne

■ **PRZYKŁAD 1.4.** Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

(a) $f(x) = \frac{x}{5} - 3$, $\mathbb{R}$; (b) $g(x) = \sqrt{-2-x}$, $(-\infty, -2]$;

(c) $h(x) = x^4 + x^2 + 1$, $(-\infty, 0]$.

Rozwiązanie. Funkcja f jest rosnąca (niemalejąca) na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla dowolnych punktów x_1, x_2 z tego zbioru z warunku $x_1 < x_2$ wynika nierówność

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Podobnie określa się funkcję malejącą oraz nierosnącą. Funkcja jest monotoniczna na zbiorze, gdy jest rosnąca, niemalejąca, malejąca lub nierosnąca na tym zbiorze.

■ (a) Pokażemy, że funkcja f jest rosnąca na $\mathbb{R}$. Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi nierówność $x_1 < x_2$. Wtedy

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{x_2}{5} - 3\right) - \left(\frac{x_1}{5} - 3\right) = \frac{x_2 - x_1}{5}.$$

Ponieważ licznik otrzymanego wyrażenia jest dodatni, więc $f(x_2) - f(x_1) > 0$. To oznacza, że funkcja f jest rosnąca.

■ (b) Pokażemy, że funkcja g jest malejąca na przedziale $(-\infty, -2]$. Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami spełniającymi nierówność $x_1 < x_2 \leq -2$. Wtedy

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= \sqrt{-2 - x_2} - \sqrt{-2 - x_1} \\ &= \frac{(\sqrt{-2 - x_2} - \sqrt{-2 - x_1})(\sqrt{-2 - x_2} + \sqrt{-2 - x_1})}{\sqrt{-2 - x_2} + \sqrt{-2 - x_1}} \\ &= \frac{(-2 - x_2) - (-2 - x_1)}{\sqrt{-2 - x_2} + \sqrt{-2 - x_1}} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{-2 - x_2} + \sqrt{-2 - x_1}}. \end{aligned}$$

Ponieważ licznik otrzymanego wyrażenia jest ujemny a mianownik dodatni, więc $g(x_2) - g(x_1) < 0$. To oznacza, że funkcja g jest malejąca na przedziale $(-\infty, -2]$.

■ (c) Pokażemy, że funkcja h jest malejąca na przedziale $(-\infty, 0]$. Niech $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ oraz $x_1 < x_2$. Wtedy

$$\begin{aligned} h(x_2) - h(x_1) &= (x_2^4 - x_1^4) + (x_2^2 - x_1^2) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2) + (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2 + 1). \end{aligned}$$

Ponieważ dla dowolnych $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ czynniki pierwszy i trzeci są dodatnie, a drugi ujemny, więc $h(x_2) - h(x_1) < 0$. To oznacza, że funkcja h jest malejąca na rozważanym przedziale.

ZADANIE 1.4. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

- (a) $f(x) = -4x + 5$, $\mathbb{R}$; (b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $\mathbb{R}$;
 (c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$, $(-\infty, 0)$; (d) $p(x) = \frac{1}{2x+1}$, $[1, \infty)$;
 (e) $q(x) = 4x - x^2$, $[2, \infty)$; (f) $r(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $[1, \infty)$.

1.3. Złożenia funkcji

PRZYKŁAD 1.5. Napisać wzory funkcji złożonych $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:

- (a) $f(x) = 2 + \cos x$, $g(x) = \sqrt{x}$; (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$;
 (c) $f(x) = -x$, $g(x) = \log x$.

Rozwiązanie. Złożeniem funkcji f i g nazywamy funkcję $g \circ f$ określoną wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Gdy znamy tylko wzory określające funkcje f i g , to za dziedzinę naturalną złożenia $g \circ f$ przyjmujemy zbiór $\{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$, gdzie D_f i D_g oznaczają dziedziny naturalne odpowiednio funkcji f i g . Oczywiście $D_{g \circ f} \subset D_f$.

(a) Przede wszystkim określimy dziedziny funkcji. Mamy $D_f = \mathbb{R}$ oraz $D_g = [0, \infty)$. Złożenie funkcji f i g określone jest wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2 + \cos x) = \sqrt{2 + \cos x},$$

a jego dziedziną naturalną jest zbiór $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$. Z kolei złożenie funkcji g i f dane jest wzorem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2 + \cos \sqrt{x},$$

a dziedziną jest zbiór $D_{f \circ g} = [0, \infty)$. Kolejne złożenia $f \circ f$ i $g \circ g$ określone są odpowiednio wzorami

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2 + \cos x) = 2 + \cos(2 + \cos x)$$

i

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}.$$

Przy czym dziedziną złożenia $f \circ f$ jest $\mathbb{R}$, a złożenia $g \circ g$ zbiór $[0, \infty)$.

Uwaga. Warto zauważyć, że złożenia $g \circ f$ i $f \circ g$ są różne. To oznacza, że na

ogół złożenie funkcji nie jest operacją przemianą. Nie wyklucza to przypadku, w którym złożenia są równe, co ilustruje następny przykład.

■ (b) Funkcje f i g mają takie same dziedziny $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Złożenie funkcji f i g oraz g i f dane są odpowiednio wzorami

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = x^2$$

oraz

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} = x^2.$$

W obu tych przypadkach dziedziną nie jest $\mathbb{R}$, a zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wynika, to z faktu, że $D_{g \circ f} \subset D_f$ i $D_{f \circ g} \subset D_g$. Kolejne dwa złożenia $f \circ f$ i $g \circ g$ określone są wzorami

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

i

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = x^4.$$

Analogicznie, jak w poprzednim przypadku, dziedziną obu złożów jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

■ (c) Jak poprzednio najpierw określimy dziedziny funkcji f i g . Mamy $D_f = \mathbb{R}$ i $D_g = (0, \infty)$. Złożenia $g \circ f$ i $f \circ g$ określone są odpowiednio wzorami

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x) = \log(-x)$$

i

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log x) = -(\log x) = -\log x.$$

Przy czym dziedziną złożenia $g \circ f$ jest zbiór $(-\infty, 0)$, a złożenia $f \circ g$ zbiór $(0, \infty)$. Z kolei złożenia $f \circ f$ i $g \circ g$ dane są wzorami

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x$$

i

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\log x) = \log(\log x).$$

W przypadku złożenia $f \circ f$ mamy $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$, a złożenia $g \circ g - D_{g \circ g} = (1, \infty)$.

ZADANIE 1.5. Napisać wzory funkcji złożonych $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:

- (a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$; (b) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 2^x$;
 (c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4$; (d) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

Odpowiedzi. ■ (a) $(g \circ f)(x) = 1/x^2$ dla $x \neq 0$, $(f \circ g)(x) = 1/x^2$ dla $x \neq 0$, $(f \circ f)(x) = x$ dla $x \neq 0$, $(g \circ g)(x) = x^4$ dla $x \in \mathbb{R}$; ■ (b) $(g \circ f)(x) = x$ dla $x > 0$, $(f \circ g)(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = \log_2(\log_2 x)$ dla $x > 1$, $(g \circ g)(x) = 2^{2^x}$ dla $x \in \mathbb{R}$; ■ (c) $(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^4 = x^2$ dla $x \geq 0$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^4} = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ dla $x \geq 0$, $(g \circ g)(x) = (x^4)^4 = x^{16}$ dla $x \in \mathbb{R}$; ■ (d) $(g \circ f)(x) = 1/\sin x$ dla $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $(f \circ g)(x) = \sin(1/x)$ dla $x \neq 0$, $(f \circ f)(x) = \sin(\sin x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ g)(x) = x$ dla $x \neq 0$.

1.4. Funkcje odwrotne

PRZYKŁAD 1.6. Uzasadnić z definicji, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

- (a) $f(x) = x^2$, $(-\infty, 0]$; (b) $g(x) = x^3$, $\mathbb{R}$; (c) $h(x) = \frac{x+2}{x}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Rozwiązanie. Funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze $A \subset D_f$, gdy dla dowolnych punktów x_1, x_2 z tego zbioru z warunku $x_1 \neq x_2$ wynika, że $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jednak przy badaniu różnowartościowości funkcji wygodnie jest korzystać z równoważnej definicji: funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze A , jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in A$ z warunku $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$.

■ (a) Mamy pokazać, że dla dowolnych $x_1, x_2 \leq 0$ z warunku $x_1^2 = x_2^2$ wynika, iż $x_1 = x_2$. Niech liczby $x_1, x_2 \leq 0$ będą dowolne. Wtedy

$$x_1^2 = x_2^2 \iff x_1^2 - x_2^2 = 0 \iff (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Zatem $x_1 - x_2 = 0$ lub $x_1 + x_2 = 0$. Z pierwszej równości wynika, że $x_1 = x_2$. Z kolei

z drugiej równości, w połączeniu z warunkiem $x_1, x_2 \leq 0$, wynika, że $x_1 = x_2 = 0$. Zatem w obu przypadkach $x_1 = x_2$. To oznacza, że funkcja $f(x) = x^2$ jest różnowartościowa na przedziale $(-\infty, 0]$.

■ (b) Mamy pokazać, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ z warunku $x_1^3 = x_2^3$ wynika, iż $x_1 = x_2$. Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy

$$x_1^3 = x_2^3 \iff x_1^3 - x_2^3 = 0 \iff (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0.$$

Zatem $x_1 - x_2 = 0$ lub $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$. Z pierwszej równości wynika, że $x_1 = x_2$. Drugą równość można przekształcić do postaci

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2 = 0.$$

Ponieważ oba składniki w równości są nieujemne, więc ich suma może być równa 0 tylko wtedy, gdy $x_1 + (x_2/2) = 0$ oraz $\sqrt{3}x_2/2 = 0$, czyli gdy $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 0$. W obu przypadkach otrzymaliśmy $x_1 = x_2$, zatem funkcja $g(x) = x^3$ jest różnowartościowa na $\mathbb{R}$.

■ (c) Pokażemy, że dla dowolnych $x_1, x_2 \neq 0$ z warunku $\frac{x_1 + 2}{x_1} = \frac{x_2 + 2}{x_2}$ wynika, iż $x_1 = x_2$. Niech liczby $x_1, x_2 \neq 0$ będą dowolne. Wtedy

$$\frac{x_1 + 2}{x_1} = \frac{x_2 + 2}{x_2} \iff (x_1 + 2)x_2 = (x_2 + 2)x_1 \iff 2x_1 = 2x_2 \iff x_1 = x_2.$$

Zatem funkcja $h(x) = (x + 2)/x$ jest różnowartościowa na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

■ **ZADANIE 1.6.** Uzasadnić z definicji, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

- (a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; (b) $g(x) = x^4$, $[0, \infty)$;
 (c) $h(x) = \sqrt{x} - 3$, $[0, \infty)$; (d) $p(x) = x - \sqrt{x}$, $[1/4, \infty)$.

■ **PRZYKŁAD 1.7.** Wyznaczyć funkcje odwrotne do funkcji:

- (a) $f(x) = 1 - \sqrt{x-4}$; (b) $g(x) = 2 - \log_5 x$;
 (c) $h(x) = \frac{1}{2^x + 4}$; (d) $p(x) = x|x|$.

Rozwiązanie. Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. Funkcją odwrotną do f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ określoną warunkiem:

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x),$$

gdzie $x \in X$ oraz $y \in Y$. Funkcja ściśle monotoniczna ma funkcję odwrotną, gdyż jest różnowartościowa. Aby uzyskać wzór określający funkcję odwrotną do funkcji f rozwiązujemy (jeżeli jest to możliwe) równanie $y = f(x)$ względem x . Wówczas mamy $x = f^{-1}(y)$.

■ (a) Dziedziną funkcji $y = f(x) = 1 - \sqrt{x-4}$ jest przedział $[4, \infty)$, a zbiorem wartości przedział $(-\infty, 1]$. Funkcja odwrotna do f istnieje, bo funkcja jest malejąca. Z równości $y = 1 - \sqrt{x-4}$ wynika, że $x = (y-1)^2 + 4$. Zatem

$$f^{-1}(y) = (y-1)^2 + 4, \quad \text{gdzie } y \in (-\infty, 1].$$

■ (b) Dziedzina funkcji $y = g(x) = 2 - \log_5 x$ jest przedział $(0, \infty)$, a zbiorem wartości $\mathbb{R}$. Funkcja odwrotna do g istnieje, bo funkcja jest malejąca. Z równości $y = 2 - \log_5 x$ mamy $x = 5^{2-y}$. Stąd

$$g^{-1}(y) = 5^{2-y}, \quad \text{gdzie } y \in \mathbb{R}.$$

■ (c) Dziedzina funkcji $y = h(x) = 1/(2^x + 4)$ jest $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości przedział $(0, 1/4)$. Funkcja odwrotna h^{-1} istnieje, gdyż funkcja h jest malejąca. Z równości $y = 1/(2^x + 4)$ mamy $x = \log_2(1/y - 4)$. Stąd

$$h^{-1}(y) = \log_2\left(\frac{1}{y} - 4\right), \quad \text{gdzie } y \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

■ (d) Dziedzina funkcji $y = p(x) = x|x|$ jest $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości również $\mathbb{R}$. Funkcja p^{-1} istnieje, bo funkcja

$$y = p(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$$

jest rosnąca. Osobno z każdej równości: $y = -x^2$ ($x < 0$) i $y = x^2$ ($x \geq 0$) wyznaczymy x . Otrzymamy odpowiednio $x = -\sqrt{-y}$ i $x = \sqrt{y}$. Stąd

$$p^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{-y} & \text{dla } y < 0, \\ \sqrt{y} & \text{dla } y \geq 0. \end{cases}$$

■ **ZADANIE 1.7.** Wyznaczyć funkcje odwrotne do funkcji:

- (a) $f(x) = \frac{3x}{x+5}$; (b) $g(x) = x^5 + \sqrt{3}$; (c) $h(x) = 4 - \log_2(x+1)$;
 (d) $p(x) = 3 - \sqrt[3]{x+2}$; (e) $t(x) = 2x - |x|$; (f) $q(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \leq 0$;
 (g*) $r(x) = 2^x - 2^{-x}$; (h*) $s(x) = x + \lfloor x \rfloor$.

Odpowiedzi. ■ (a) $f^{-1}(y) = 5y/(3-y)$, $y \neq 3$; ■ (b) $g^{-1}(y) = \sqrt[5]{y - \sqrt{3}}$, $y \in \mathbb{R}$;

■ (c) $h^{-1}(y) = 2^{4-y} - 1$, $y \in \mathbb{R}$; ■ (d) $p^{-1}(y) = (3-y)^3 - 2$, $y \in \mathbb{R}$;

■ (e) $t^{-1}(y) = \begin{cases} y/3 & \text{dla } y < 0, \\ y & \text{dla } y \geq 0; \end{cases}$ ■ (f) $q^{-1}(y) = -\sqrt{1/y - 1}$, $y \in (0, 1]$;

■ (g*) $r^{-1}(y) = \log_2\left(y + \sqrt{y^2 + 4}\right) - 1$, $y \in \mathbb{R}$; ■ (h*) $s^{-1}(y) = \begin{cases} \vdots \\ y+1 & \text{dla } -2 \leq y < -1, \\ y & \text{dla } 0 \leq y < 1, \\ y-1 & \text{dla } 2 \leq y < 3; \\ \vdots \end{cases}$

1.5. Funkcje elementarne i inne

■ **PRZYKŁAD 1.8.** Naszkicować wykresy funkcji:

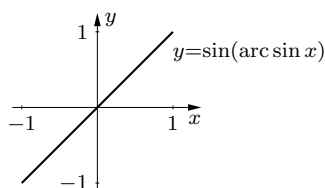
(a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$; (b) $g(x) = \arcsin(\sin x)$.

Rozwiązanie.

■ (a) Dziedziną funkcji $f(x) = \sin(\arcsin x)$ jest przedział $[-1, 1]$. Dla $x \in [-1, 1]$ mamy

$$f(x) = \sin(\arcsin x) = x.$$

Równość ta wynika bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej. Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku.



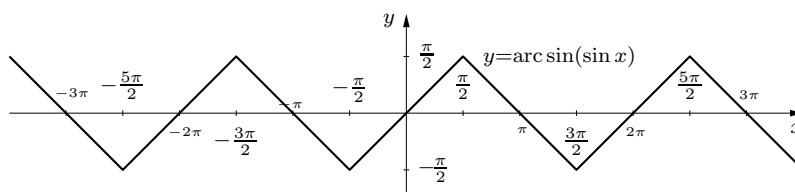
■ (b) Dziedziną funkcji $g(x) = \arcsin(\sin x)$ jest $\mathbb{R}$. Funkcja ta jest okresowa i ma okres $T = 2\pi$. Zatem wykres funkcji g wystarczy sporządzić np. na przedziale $[-\pi/2, 3\pi/2]$. Dla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ mamy $g(x) = x$. Równość ta wynika bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej. Dla $x \in (\pi/2, 3\pi/2]$ mamy $x = \pi + u$, gdzie $u \in (-\pi/2, \pi/2]$. Stąd

$$\begin{aligned} g(x) &= \arcsin(\sin x) = \arcsin[\sin(\pi + u)] = \arcsin(-\sin u) \\ &= -\arcsin(\sin u) = -u = \pi - x. \end{aligned}$$

Na przedziale $[-\pi/2, 3\pi/2]$ funkcja g jest określona wzorem:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [-\pi/2, \pi/2], \\ \pi - x & \text{dla } x \in (\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases}$$

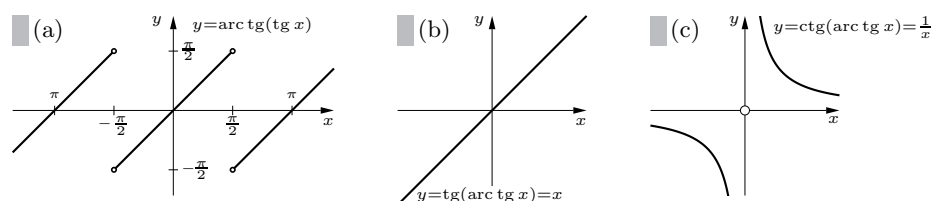
Korzystając teraz z okresowości funkcji g możemy sporządzić jej wykres na $\mathbb{R}$.



ZADANIE 1.8. Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $f(x) = \arctg(\operatorname{tg} x)$; (b) $g(x) = \operatorname{tg}(\arctg x)$; (c) $h(x) = \operatorname{ctg}(\arctg x)$.

Odpowiedzi.



PRZYKŁAD 1.9.

(a) Na parterze wielopiętrowego budynku z windą jest m mieszkań, a na każdym piętrze jest po r mieszkań. Znaleźć funkcję określającą numer przycisku w windzie, który trzeba nacisnąć, aby dojechać do piętra z mieszkaniem o numerze n . Narysować wykres tej funkcji dla $m = 4$ oraz $r = 3$.

(b) Podać wzór określający ilość cyfr liczby naturalnej n w jej zapisie dwójkowym.

(c) Za wezwanie taxi pasażer płaci 6 zł, a za każde przejechane 500 m trasy 3 zł. Znaleźć funkcję wskazującą opłatę za przejazd taksówką x metrów.

Rozwiązanie.

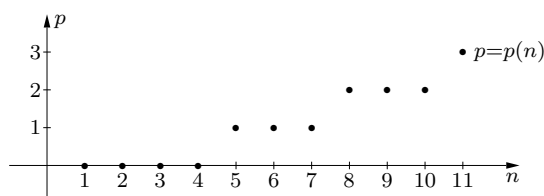
(a) Funkcja p wskazująca numer piętra, na którym jest mieszkanie o numerze n , ma postać

$$p(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leq n \leq m, \\ \left\lfloor \frac{n-m-1}{r} \right\rfloor + 1 & \text{dla } n > m, \end{cases}$$

gdzie $\lfloor u \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby u . Dla danych z zadania funkcja ta ma postać

$$p(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leq n \leq 4, \\ \left\lfloor \frac{n-5}{3} \right\rfloor + 1 & \text{dla } n > 4 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wykres funkcji p przedstawiono na rysunku.



■ (b) Niech k oznacza ilość cyfr liczby naturalnej n w układzie dwójkowym. Wtedy

$$2^{k-1} \leq n < 2^k.$$

Stąd $k - 1 \leq \log_2 n < k$. Zatem $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

■ (c) Najpierw określimy liczbę odcinków 500 m na trasie długości x metrów. Pełnych odcinków jest $\lfloor x/500 \rfloor$. Po uwzględnieniu kwoty 6 zł za wezwanie taxi otrzymamy, że opłata za przejazd x metrów wyniesie $6 + 3 \lfloor x/500 \rfloor$ złotych.

■ **ZADANIE 1.9.** (a) Znaleźć wzór na zaokrąglanie liczb dodatnich do najbliższych całkowitych (np. $1.02 \approx 1$, $4.5 \approx 5$, $7.83 \approx 8$, $0.29 \approx 0$).

(b) Nowy Rok wypadł w poniedziałek. Znaleźć wzór wskazujący, który dzień tygodnia wypada n -tego dnia tego roku.

(c) Bankomat wypłaca pieniądze w banknotach o nominałach 200, 100, 50, 20 oraz 10 zł, przy czym zawsze wydaje minimalną liczbę banknotów. Znaleźć wzory określające liczbę banknotów o nominałach 200 i 100 zł w zależności od wypłacanej kwoty.

(d) W zegarku elektronicznym impuls jest generowany co sekundę. Korzystając z funkcji część całkowita zapisać aktualny czas w postaci $gg : mm : ss$ w zależności od liczby x impulsów. Rozważyć dwie możliwości (i) $00 \leq gg \leq 23$ oraz (ii) $00 \leq gg < 12$. Przyjąć, że generowanie impulsów rozpoczęto o północy.

(e) Znaleźć wzór określający przedostatnią cyfrę w zapisie dziesiętnym liczby naturalnej $n \geq 10$.

(f) Drukarka drukuje jednostronnie na jednej kartce 4 strony tekstu. Ile kartek należy przygotować, aby wydrukować n stron tekstu?

Odpowiedzi. ■ (a) $\lfloor x + 1/2 \rfloor$; ■ (b) $n - 7 \lfloor (n - 1)/7 \rfloor$, 1 oznacza, że jest to poniedziałek, 2 - wtorek, ..., 7 - niedziela; ■ (c) $b_{200} = \lfloor x/200 \rfloor$, $b_{100} = \left\lfloor \frac{x - 200 \lfloor x/200 \rfloor}{100} \right\rfloor$, gdzie x jest wybieraną kwotą;

■ (d) (i) $\begin{cases} ss = x - \lfloor x/60 \rfloor \cdot 60, \\ mm = \lfloor x/60 \rfloor - \lfloor x/3600 \rfloor \cdot 60, \\ gg = \lfloor x/3600 \rfloor - \lfloor x/86400 \rfloor \cdot 24; \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} ss = x - \lfloor x/60 \rfloor \cdot 60, \\ mm = \lfloor x/60 \rfloor - \lfloor x/3600 \rfloor \cdot 60, \\ gg = \lfloor x/3600 \rfloor - \lfloor x/43200 \rfloor \cdot 12; \end{cases}$

■ (e) $c(n) = \lfloor n/10 \rfloor - 10 \left\lfloor \frac{\lfloor n/10 \rfloor}{10} \right\rfloor$; ■ (f) $\lfloor (n + 3)/4 \rfloor$.