# ANALIZA
# MATEMATYCZNA 1

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

# ANALIZA MATEMATYCZNA 1

## Przykłady i zadania

Wydanie trzydzieste uzupełnione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2024

*Marian Gewert*
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

*Zbigniew Skoczylas*
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

*Projekt okładki:*
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej



Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–67234–06–1

---

Wydanie XXX uzupełnione, Wrocław 2024
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy Sp. Kom.

---

# Spis treści

# Wstęp

Komplet podręczników do Analizy matematycznej 1 składa się z trzech części. Pierwszą z nich jest książka *„Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory”*, drugą – niniejszy zbiór zadań, a ostatnią – opracowanie *„Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy”*. Książki są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać również studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów, a także uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych oraz wojskowych.

Zbiór zawiera przykładowe zadania z rozwiązaniami przedstawionymi „krok po kroku”, przy czym rozwiązania poprzedzone są krótkimi wprowadzeniami teoretycznymi. Ponadto, umieszczono w nim podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Bezpośrednio za zadaniami podano wskazówki do rozwiązań i odpowiedzi. Przykłady i zadania obejmują rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej wraz z zastosowaniami. Obszerny materiał teoretyczny, którego znajomość jest potrzebna do rozwiązywania zadań, można znaleźć w pierwszej części zestawu. Zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze i skierowane do ambitnych studentów. Zadania ze sprawdzianów przeprowadzonych w poprzednich latach w Politechnice Wrocławskiej zawiera trzecia część zestawu. Więcej trudnych i nietypowych zadań Czytelnik znajdzie w książce *„Studencki konkurs matematyczny”*.

Uzupełnieniem zestawu podręczników do Analizy matematycznej 1 jest książka pt. *„Przykłady i kontrprzykłady z analizy matematycznej”*. Publikacja ta, przeznaczona dla ambitnych studentów, zawiera m.in. przykłady ciągów, funkcji, granic, szeregów, całek itp. o nieoczekiwanych własnościach oraz kontrprzykłady świadczące, że nie można osłabić założeń klasycznych twierdzeń analizy.

Do obecnego wydania dołączono kilkanaście nowych przykładów, zadań oraz ilustracji. Ponadto, poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o zbiorze.

*Marian Gewert* *Zbigniew Skoczylas*

# 1. Funkcje

## 1.1. Podstawowe określenia

**PRZYKŁAD 1.1.** Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-4}$; (b) $g(x) = \sqrt{16-x^4}$; (c) $h(x) = \dfrac{1}{\log\left(2x^2-x\right)}$;

(d) $p(x) = \log_3 |\cos x|$; (e) $q(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}}$; (f) $r(x) = \operatorname{tg}\left[\pi\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]$.

**Rozwiązanie.** Dziedziną naturalną funkcji określonej wzorem $f(x)$ nazywamy zbiór $D_f$ liczb rzeczywistych $x$, dla których można wyznaczyć $f(x)$.

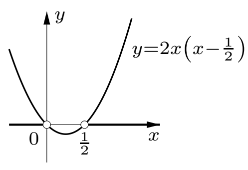
(a) Dziedzina funkcji $f$ jest określona przez warunki $x \geqslant 0$ oraz $x^2-4 \neq 0$. Ponieważ $x^2-4 \neq 0 \iff x^2 \neq 4 \iff (x \neq -2) \wedge (x \neq 2)$. Zatem $D_f = [0,\infty) \setminus \{2\} = [0,2) \cup (2,\infty)$.

(b) Dziedzina funkcji $g$ jest określona przez warunek $16-x^4 \geqslant 0$. Ponieważ

$$16-x^4 = \left(4-x^2\right)\left(4+x^2\right).$$

oraz $4+x^2 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc nierówność $16-x^4 \geqslant 0$ jest równoważna nierówności $4-x^2 \geqslant 0$, czyli $x^2 \leqslant 4$. Zatem $D_g = [-2,2]$.

(c) Dziedzina funkcji $h$ jest określona przez warunki $2x^2-x > 0$ oraz $\log\left(2x^2-x\right) \neq 0$. Pierwsza nierówność jest równoważna nierówności $2x\,(x-1/2) > 0$, której rozwiązaniem jest zbiór $(-\infty,0)\cup(1/2,\infty)$ (rysunek). Z kolei drugi warunek można zapisać w postaci




$$2x^2-x-1 \neq 0 \iff 2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) \neq 0 \iff (x \neq 1) \wedge \left(x \neq -\frac{1}{2}\right).$$

Zatem

$$D_h = \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},0\right) \cup \left(\frac{1}{2},1\right) \cup (1,\infty).$$

(d) Dziedzina funkcji $p$ jest zbiorem rozwiązań nierówności $|\cos x| > 0$, która jest równoważna warunkowi $\cos x \neq 0$. Zatem $D_p = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + n\pi : \ n \in \mathbb{Z}\}$.

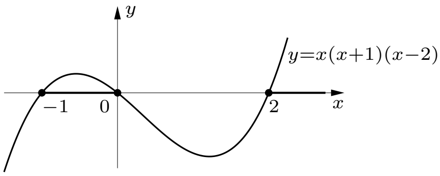
(e) Warunki określające dziedzinę funkcji $q$ mają postać

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad (x+1)(x-2) \neq 0.$$

Są one równoważne warunkom

$$x(x+1)(x-2) \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad x \neq -1, \ x \neq 2$$

Rozwiązaniem pierwszego z nich jest zbiór $[-1, 0] \cup [2, \infty)$ (rysunek).




Uwzględniając dwa pozostałe warunki otrzymamy $D_q = (-1, 0] \cup (2, \infty)$.

(f) Funkcja $\operatorname{tg} u$ jest określona dla $u \neq \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Zatem funkcja $r$ jest określona dla $\pi\,(x + 1/2) \neq \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Stąd otrzymamy $x \neq k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Dziedzina funkcji $r$ ma postać $D_r = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

**ZADANIE 1.1.** Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; (b) $g(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$; (c) $h(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$;

(d) $p(x) = \log_3 (2 - |x|)$; (e) $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; (f) $r(x) = \dfrac{2^x}{2^x-4}$.

**Odpowiedzi.** (a) $D_f = \ldots \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \ldots$; (b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$; (c) $D_h = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; (d) $D_p = (-2, 2)$; (e) $D_q = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; (f) $D_r = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

**PRZYKŁAD 1.2.** Zbadać, czy podane funkcje są parzyste (nieparzyste):

(a) $f(x) = |x|\left(x^4 + 2\right)$; (b) $g(x) = x \cos x$;

(c) $h(x) = \dfrac{1}{3^x - 3^{-x}}$; (d) $p(x) = \log_2 \dfrac{5-x}{5+x}$.

**Rozwiązanie.** Funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest parzysta (nieparzysta), jeżeli dla każdego $x \in X$ także $-x \in X$ oraz $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$. Pierwszy z warunków oznacza, że zbiór $X$ jest symetryczny względem 0, a drugi, iż oś $Oy$ (początek układu współrzędnych) jest osią (środkiem) symetrii wykresu funkcji $f$.

(a) Dziedziną funkcji $f = |x|\left(x^4 + 2\right)$ jest $\mathbb{R}$, czyli zbiór symetryczny względem 0. Ponadto, dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$f(-x) = |-x|\left((-x)^4 + 2\right) = |-1||x|\left((-1)^4 x^4 + 2\right) = |x|\left(x^4 + 2\right) = f(x).$$

To oznacza, że funkcja $f$ jest parzysta.

(b) Dziedziną funkcji $g(x) = x \cos x$ jest $\mathbb{R}$, czyli zbiór symetryczny względem 0. Ponadto, wobec faktu, iż funkcja $\cos x$ jest parzysta, mamy

$$g(-x) = (x)\cos(-x) = -x\cos x = -g(x).$$

Zatem funkcja $g$ jest nieparzysta.

(c) Dziedziną funkcji $h(x) = \dfrac{1}{3^x - 3^{-x}}$ jest zbiór rozwiązań nierówności $3^x - 3^{-x} \neq 0$, która jest równoważna warunkowi $3^x \neq 3^{-x}$, a dalej warunkowi $x \neq 0$. Zatem dziedziną funkcji $h$ jest zbiór $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ – symetryczny względem 0. Ponadto, dla każdego $x$ z tego zbioru mamy

$$h(-x) = \frac{1}{3^{-x} - 3^x} = \frac{1}{-\left(-3^{-x} + 3^x\right)} = -\frac{1}{3^x - 3^{-x}} = -h(x).$$

To oznacza, że funkcja $h$ jest nieparzysta.

(d) Warunek określający dziedzinę funkcji $p(x) = \log_2 \dfrac{5-x}{5+x}$ ma postać

$$\frac{5-x}{5+x} > 0.$$

Jest on równoważny nierówności

$$(5-x)(5+x) > 0,$$

rozwiązaniem której jest zbiór $(-5, 5)$ – symetryczny względem 0. Korzystając ze wzoru $\log_a b^c = c \log_a b$, gdzie $a, b > 0$, $a \neq 1$, $c \in \mathbb{R}$, dla $x \in (-5, 5)$ mamy

$$p(-x) = \log_2 \frac{5-(-x)}{5+(-x)} = \log_2 \frac{5+x}{5-x} = \log_2 \left(\frac{5-x}{5+x}\right)^{-1} = -\log_2 \frac{5-x}{5+x} = -p(x).$$

Zatem funkcja $p$ jest nieparzysta.

**ZADANIE 1.2.** Zbadać, czy podane funkcje są parzyste (nieparzyste):

(a) $f(x) = \dfrac{1+|x|}{2-|x|}$; (b) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$;

(c) $h(x) = 2^x + 2^{-x}$; (d) $q(x) = x^2 \operatorname{ctg} x$.

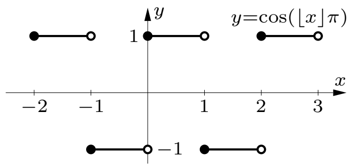
**Odpowiedzi.** (a), (c) – parzysta; (b), (d) – nieparzysta.

**PRZYKŁAD 1.3.** Uzasadnić, że podane funkcje są okresowe oraz znaleźć ich podstawowe okresy:

(a) $f(x) = \cos\left(\lfloor x \rfloor \pi\right)$; (b) $g(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$;

(c) $h(x) = \sin 2x + 3\cos \dfrac{x}{2}$; (d) $p(x) = \sin^2 x$.

**Rozwiązanie.** Funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest okresowa, jeżeli istnieje liczba dodatnia $T$ taka, że dla każdego $x \in X$ także $x \pm T \in X$ oraz $f(x+T) = f(x)$. Liczbę $T$ nazywamy okresem funkcji $f$. Jeżeli istnieje najmniejszy okres funkcji, to nazywamy go okresem podstawowym.




(a) Dziedziną funkcji $f(x) = \cos(\lfloor x \rfloor \pi)$ jest $\mathbb{R}$. Niech $x \in [k, k+1)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, wtedy $\lfloor x \rfloor = k$, a dalej

$$\cos(\lfloor x \rfloor \pi) = \cos k\pi = (-1)^k.$$

Zatem dla $T = 2$ spełnione są warunki okresowości badanej funkcji. Liczba $T = 2$ jest okresem podstawowym.

(b) Dziedzinę funkcji $g(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$ określają warunki $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ oraz $\operatorname{ctg} x \geqslant 0$. Zatem dziedziną funkcji $g$ jest zbiór

$$D_g = \ldots \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right] \cup \ldots$$

Liczba dodatnia $T$ jest okresem funkcji $g$, jeżeli dla każdego $x \in D_g$ mamy

$$g(x+T) = \sqrt{\operatorname{ctg}(x+T)} = \sqrt{\operatorname{ctg} x} = g(x).$$

Warunek ten jest równoważny warunkowi $\operatorname{ctg}(x+T) = \operatorname{ctg} x$, a dalej równości $x+T = x + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. To oznacza, że okresem funkcji $g$ jest $T = k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$, a okresem podstawowym $T = \pi$. Łatwo zauważyć, że jeżeli $x \in D_g$, to również $x \pm \pi \in D_g$.

(c) Dziedziną funkcji $h(x) = \sin 2x + 3\cos\frac{x}{2}$ jest $\mathbb{R}$. Zauważmy, że funkcja $\sin 2x$ ma okres podstawowy $T_1 = \pi$, a funkcja $\cos\frac{x}{2}$ – $T_2 = 4\pi = 4T_1$. Zatem $T = 4\pi$ jest okresem podstawowym funkcji $h$.

(d) Dziedziną funkcji $k(x) = \sin^2 x$ jest $\mathbb{R}$. Liczba dodatnia $T$ jest okresem funkcji $k$, jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$k(x+T) = \sin^2(x+T) = \sin^2 x = k(x).$$

Warunek ten jest równoważny warunkom

$$\sin(x+T) = \sin x \quad \text{lub} \quad \sin(x+T) = -\sin x.$$

Z pierwszej równości mamy

$$x + T = x + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x + T = \pi - x + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$

a drugiej

$$x + T = -x + 2l\pi \quad \text{lub} \quad x + T = \pi + x + 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

Wyznaczając stąd $T$ mamy kolejno $T = 2k\pi$, $T = -2x + (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ oraz $T = -2x + 2l\pi$, $T = (2l+1)\pi$ $(l \in \mathbb{N})$. Zatem każda liczba postaci $T = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ oraz $T = (2l+1)\pi$ $(l \in \mathbb{N})$ jest okresem badanej funkcji. Stąd $T = \pi$ jest okresem podstawowym.

**ZADANIE 1.3.** Uzasadnić, że podane funkcje są okresowe oraz znaleźć ich podstawowe okresy:

(a) $f(x) = \cos^2 2x$; (b) $g(x) = \sqrt{\operatorname{tg} \pi x}$;

(c) $h(x) = 1 + \sin 3x \cos x$; (d) $p(x) = (-1)^{\lfloor 3x \rfloor}$.

**Odpowiedzi.** (a) $T = \pi$; (b) $T = 1$; (c) $T = 2\pi$; (d) $T = \frac{2}{3}$.

## 1.2. Funkcje monotoniczne

**PRZYKŁAD 1.4.** Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{5} - 3,\ \mathbb{R};$ (b) $g(x) = \sqrt{-2-x},\ (-\infty, -2];$

(c) $q(x) = x^4 + x^2 + 1,\ (-\infty, 0];$ (d) $r(x) = x + \dfrac{4}{x},\ [2, \infty).$

**Rozwiązanie.** Funkcja $f$ jest rosnąca (niemalejąca) na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla dowolnych punktów $x_1$, $x_2$ z tego zbioru z warunku $x_1 < x_2$ wynika nierówność

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \leqslant f(x_2)).$$

Podobnie określa się funkcję malejącą oraz nierosnącą. Funkcja jest monotoniczna na zbiorze, gdy jest rosnąca, niemalejąca, malejąca lub nierosnąca na tym zbiorze.

(a) Pokażemy, że funkcja $f(x) = x/5 - 3$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$. Niech $x_1, x_2$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi nierówność $x_1 < x_2$. Wtedy

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{x_2}{5} - 3\right) - \left(\frac{x_1}{5} - 3\right) = \frac{x_2 - x_1}{5}.$$

Ponieważ licznik otrzymanego wyrażenia jest dodatni, więc $f(x_2) - f(x_1) > 0$. To oznacza, że funkcja $f$ jest rosnąca.

(b) Pokażemy, że funkcja $g(x) = \sqrt{-2-x}$ jest malejąca na przedziale $(-\infty, -2]$. Niech $x_1, x_2$ będą dowolnymi liczbami spełniającymi nierówność $x_1 < x_2 \leqslant -2$. Wtedy

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= \sqrt{-2-x_2} - \sqrt{-2-x_1} \\ &= \frac{\left(\sqrt{-2-x_2} - \sqrt{-2-x_1}\right)\left(\sqrt{-2-x_2} + \sqrt{-2-x_1}\right)}{\sqrt{-2-x_2} + \sqrt{-2-x_1}} \\ &= \frac{(-2-x_2) - (-2-x_1)}{\sqrt{-2-x_2} + \sqrt{-2-x_1}} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{-2-x_2} + \sqrt{-2-x_1}}. \end{aligned}$$

Ponieważ licznik otrzymanego wyrażenia jest ujemny a mianownik dodatni, więc $g(x_2) - g(x_1) < 0$. To oznacza, że funkcja $g$ jest malejąca na przedziale $(-\infty, -2]$.

(c) Pokażemy, że funkcja $q(x) = x^4 + x^2 + 1$ jest malejąca na przedziale $(-\infty, 0]$. Niech $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ oraz $x_1 < x_2$. Wtedy

$$\begin{aligned} q(x_2) - q(x_1) &= \left(x_2^4 - x_1^4\right) + \left(x_2^2 - x_1^2\right) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)\left(x_2^2 + x_1^2\right) + (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)\left(x_2^2 + x_1^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Ponieważ dla dowolnych $x_1$, $x_2 \in (-\infty, 0)$ czynniki pierwszy i trzeci są dodatnie, a drugi ujemny, więc $q(x_2) - q(x_1) < 0$. To oznacza, że funkcja $q$ jest malejąca na rozważanym przedziale.

(d) Pokażemy, że funkcja $r(x) = x + 4/x$ jest rosnąca na przedziale $[2, \infty)$. Niech $x_1$, $x_2$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $2 \leqslant x_1 < x_2$.

Wtedy

$$\begin{aligned} r(x_2) - r(x_1) &= \left(x_2 + \frac{4}{x_2}\right) - \left(x_1 + \frac{4}{x_1}\right) \\ &= (x_2 - x_1) + \frac{4(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 4)}{x_1 x_2}. \end{aligned}$$

Ponieważ $x_2 > x_1$ oraz $x_1 x_2 > 2^2 = 4$, więc $x_2 - x_1 > 0$ oraz $x_1 x_2 - 4 > 0$. Zatem $r(x_2) - r(x_1) > 0$. To oznacza, że funkcja $r$ jest rosnąca na przedziale $[2, \infty)$.

**ZADANIE 1.4.** Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

(a) $f(x) = -4x + 5,\ \mathbb{R}$; (b) $g(x) = \sqrt[3]{x},\ \mathbb{R}$;

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2},\ (-\infty, 0)$; (d) $p(x) = \dfrac{1}{2x+1},\ [1, \infty)$;

(e) $q(x) = 4x - x^2,\ [2, \infty)$; (f) $r(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2},\ [1, \infty)$.

## 1.3. Złożenia funkcji

**PRZYKŁAD 1.5.** Napisać wzory funkcji złożonych $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:

(a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 2^x$; (b) $f(x) = 2 + \cos x, \quad g(x) = \sqrt{x}$;

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$; (d) $f(x) = -x, \quad g(x) = \log x$.

**Rozwiązanie.** Złożeniem funkcji $f$ i $g$ nazywamy funkcję $g \circ f$ określoną wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Gdy znamy tylko wzory określające funkcje $f$ i $g$, to za dziedzinę naturalną złożenia $g \circ f$ przyjmujemy zbiór $\{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$. Mamy kolejno:

(a)
$$\begin{aligned} &(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(x^2\right) = \left(x^2\right)^2 = x^4, \quad D_{f\circ f} = \mathbb{R}; \\ &(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x}, \quad D_{f\circ g} = \mathbb{R}; \\ &(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = 2^{\left(x^2\right)} = 2^{x^2}, \quad D_{g\circ f} = \mathbb{R}; \\ &(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(2^x) = 2^{(2^x)} = 2^{2^x}, \quad D_{g\circ g} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} &(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2 + \cos x) = 2 + \cos(2 + \cos x), \quad D_{f\circ f} = \mathbb{R}; \\ &(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2 + \cos\sqrt{x}, \quad D_{f\circ g} = [0, \infty); \\ &(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2 + \cos x) = \sqrt{2 + \cos x}, \quad D_{g\circ f} = \mathbb{R}; \\ &(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}, \quad D_{g\circ g} = [0, \infty). \end{aligned}$$

(c)
$$(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x,\quad D_{f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{0\};$$
$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x^2}}=x^2,\quad D_{f\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{0\};$$
$$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=x^2,\quad D_{g\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{0\};$$
$$(g\circ g)(x)=g\left(g(x)\right)=g\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}=x^4,\quad D_{g\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

(d)
$$(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=f\left(-x\right)=-(-x)=x,\quad D_{f\circ f}=\mathbb{R};$$
$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\log x\right)=-\left(\log x\right)=-\log x,\quad D_{f\circ g}=(0,\infty);$$
$$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(-x\right)=\log(-x),\quad D_{g\circ f}=(-\infty,0);$$
$$(g\circ g)(x)=g\left(g(x)\right)=g\left(\log x\right)=\log\left(\log x\right),\quad D_{g\circ g}=(1,\infty).$$

**ZADANIE 1.5.** Napisać wzory funkcji złożonych $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x^2$; (b) $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=2^x$;

(c) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^4$; (d) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

**Odpowiedzi.** (a) $(f\circ f)(x)=x$ dla $x\neq 0$, $(f\circ g)(x)=1/x^2$ dla $x\neq 0$, $(g\circ f)(x)=1/x^2$ dla $x\neq 0$, $(g\circ g)(x)=x^4$ dla $x\in\mathbb{R}$; (b) $(f\circ f)(x)=\log_2\left(\log_2 x\right)$ dla $x>1$, $(f\circ g)(x)=x$ dla $x\in\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=x$ dla $x>0$, $(g\circ g)(x)=2^{2^x}$ dla $x\in\mathbb{R}$; (c) $(f\circ f)(x)=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$ dla $x\geqslant 0$, $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^4}=x^2$ dla $x\in\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=\left(\sqrt{x}\right)^4=x^2$ dla $x\geqslant 0$, $(g\circ g)(x)=\left(x^4\right)^4=x^{16}$ dla $x\in\mathbb{R}$; (d) $(f\circ f)(x)=\sin(\sin x)$ dla $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=\sin(1/x)$ dla $x\neq 0$, $(g\circ f)(x)=1/\sin x$ dla $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, $(g\circ g)(x)=x$ dla $x\neq 0$.

## 1.4. Funkcje odwrotne

**PRZYKŁAD 1.6.** Uzasadnić z definicji, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

(a) $f(x)=x^2$, $(-\infty,0]$; (b) $g(x)=x^3$, $\mathbb{R}$; (c) $h(x)=\dfrac{x+2}{x}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**Rozwiązanie.** Funkcja $f$ jest różnowartościowa na zbiorze $A\subset D_f$, gdy dla dowolnych punktów $x_1$, $x_2$ z tego zbioru z warunku $x_1\neq x_2$ wynika, że $f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)$. Jednak przy badaniu różnowartościowości funkcji wygodnie jest korzystać z równoważnej definicji: funkcja $f$ jest różnowartościowa na zbiorze $A$, jeżeli dla dowolnych $x_1$, $x_2$ z warunku $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$.

(a) Mamy pokazać, że dla dowolnych $x_1$, $x_2 \leqslant 0$ z warunku $x_1^2 = x_2^2$ wynika, iż $x_1 = x_2$. Niech liczby $x_1, x_2 \leqslant 0$ będą dowolne. Wtedy

$$x_1^2 = x_2^2 \iff x_1^2 - x_2^2 = 0 \iff (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Zatem $x_1 - x_2 = 0$ lub $x_1 + x_2 = 0$. Z pierwszej równości wynika, że $x_1 = x_2$. Z kolei z drugiej równości, w połączeniu z warunkiem $x_1$, $x_2 \leqslant 0$, wynika, że $x_1 = x_2 = 0$. Zatem w obu przypadkach $x_1 = x_2$. To oznacza, że funkcja $f(x) = x^2$ jest różnowartościowa na przedziale $(-\infty, 0]$.

(b) Mamy pokazać, że dla dowolnych $x_1$, $x_2 \in \mathbb{R}$ z warunku $x_1^3 = x_2^3$ wynika, iż $x_1 = x_2$. Niech $x_1, x_2$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy

$$x_1^3 = x_2^3 \iff x_1^3 - x_2^3 = 0 \iff (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right) = 0.$$

Zatem $x_1 - x_2 = 0$ lub $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0$. Z pierwszej równości wynika, że $x_1 = x_2$. Drugą równość można przekształcić do postaci

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x_2\right)^2 = 0.$$

Ponieważ oba składniki w równości są nieujemne, więc ich suma może być równa 0 tylko wtedy, gdy $x_1 + (x_2/2) = 0$ oraz $\sqrt{3}x_2/2 = 0$, czyli gdy $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 0$. W obu przypadkach otrzymaliśmy $x_1 = x_2$, zatem funkcja $g(x) = x^3$ jest różnowartościowa na $\mathbb{R}$.

(c) Mamy pokazać, że dla dowolnych $x_1$, $x_2 \neq 0$ z warunku $(x_1+2)/x_1 = (x_2+2)/x_2$ wynika, iż $x_1 = x_2$. Niech liczby $x_1, x_2 \neq 0$ będą dowolne. Wtedy

$$\frac{x_1 + 2}{x_1} = \frac{x_2 + 2}{x_2} \iff (x_1 + 2)\, x_2 = (x_2 + 2)\, x_1 \iff 2x_1 = 2x_2 \iff x_1 = x_2.$$

Zatem funkcja $h(x) = (x + 2)/x$ jest różnowartościowa na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

**ZADANIE 1.6.** Uzasadnić z definicji, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; (b) $g(x) = x^4$, $[0, \infty)$;

(c) $h(x) = \sqrt{x} - 3$, $[0, \infty)$; (d) $p(x) = x - \sqrt{x}$, $[1/4, \infty)$.

**PRZYKŁAD 1.7.** Wyznaczyć funkcje odwrotne do funkcji:

(a) $f(x) = 1 - \sqrt{x - 4}$; (b) $g(x) = 2 - \log_5 x$;

(c) $h(x) = \dfrac{1}{2^x + 4}$; (d) $p(x) = x|x|$.

**Rozwiązanie.** Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. Funkcją odwrotną do $f$ nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ określoną warunkiem:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x),$$

gdzie $x \in X$ oraz $y \in Y$. Funkcja ściśle monotoniczna ma funkcję odwrotną, gdyż jest różnowartościowa. Aby uzyskać wzór określający funkcję odwrotną do funkcji $f$ rozwiązujemy (jeżeli jest to możliwe) równanie $y = f(x)$ względem $x$. Wówczas mamy $x = f^{-1}(y)$.

(a) Dziedziną funkcji $y = f(x) = 1 - \sqrt{x-4}$ jest przedział $[4, \infty)$, a zbiorem wartości przedział $(-\infty, 1]$. Funkcja odwrotna do $f$ istnieje, bo funkcja jest malejąca. Z równości $y = 1 - \sqrt{x-4}$ wynika, że $x = (y-1)^2 + 4$. Zatem

$$f^{-1}(y) = (y-1)^2 + 4, \quad \text{gdzie } y \in (-\infty, 1].$$

(b) Dziedziną funkcji $y = g(x) = 2 - \log_5 x$ jest przedział $(0, \infty)$, a zbiorem wartości $\mathbb{R}$. Funkcja odwrotna do $g$ istnieje, bo funkcja jest malejąca. Z równości $y = 2 - \log_5 x$ mamy $x = 5^{2-y}$. Stąd

$$g^{-1}(y) = 5^{2-y}, \quad \text{gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

(c) Dziedziną funkcji $y = h(x) = 1/(2^x + 4)$ jest $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości przedział $(0, 1/4)$. Funkcja odwrotna $h^{-1}$ istnieje, gdyż funkcja $h$ jest malejąca. Z równości $y = 1/(2^x + 4)$ mamy $x = \log_2(1/y - 4)$. Stąd

$$h^{-1}(y) = \log_2\left(\frac{1}{y} - 4\right), \quad \text{gdzie } y \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

(d) Dziedziną funkcji $y = p(x) = x|x|$ jest $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości również $\mathbb{R}$. Funkcja $p^{-1}$ istnieje, bo funkcja

$$y = p(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geqslant 0, \end{cases}$$

jest rosnąca. Osobno z każdej równości: $y = -x^2$ $(x < 0)$ i $y = x^2$ $(x \geqslant 0)$ wyznaczymy $x$. Otrzymamy $x = -\sqrt{-y}$ i odpowiednio $x = \sqrt{y}$. Stąd

$$p^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{-y} & \text{dla } y < 0, \\ \sqrt{y} & \text{dla } y \geqslant 0. \end{cases}$$

**ZADANIE 1.7.** Wyznaczyć funkcje odwrotne do funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{3x}{x+5}$; (b) $g(x) = x^5 + \sqrt{3}$;

(c) $h(x) = 4 - \log_2(x+1)$; (d) $p(x) = 3 - \sqrt[3]{x+2}$;

(e) $q(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \leqslant 0$; (f*) $r(x) = 2^x - 2^{-x}$;

(g*) $s(x) = x + \lfloor x \rfloor$; (h) $t(x) = 2x - |x|$.

**Odpowiedzi.** (a) $f^{-1}(y) = 5y/(3-y)$, $y \neq 3$; (b) $g^{-1}(y) = \sqrt[5]{y - \sqrt{3}}$, $y \in \mathbb{R}$; (c) $h^{-1}(y) = 2^{4-y} - 1$, $y \in \mathbb{R}$; (d) $p^{-1}(y) = (3-y)^3 - 2$, $y \in \mathbb{R}$; (e) $q^{-1}(y) =$

$-\sqrt{1/y-1}$, $y \in (0,1]$; (f*) $r^{-1}(y) = \log_2\left(y+\sqrt{y^2+4}\right) - 1$, $y \in \mathbb{R}$;

$$\text{(g*)}\ s^{-1}(y) = \begin{cases} \quad\vdots \\ y+1 & \text{dla } -2 \leqslant y < -1, \\ y & \text{dla } \quad 0 \leqslant y < 1, \\ y-1 & \text{dla } \quad 2 \leqslant y < 3; \\ \quad\vdots \end{cases} \quad \text{(h)}\ t^{-1}(y) = \begin{cases} y/3 & \text{dla } y < 0, \\ y & \text{dla } y \geqslant 0. \end{cases}$$

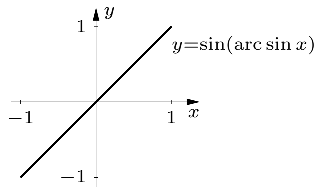
## 1.5. Funkcje elementarne i inne

**PRZYKŁAD 1.8.** Naszkicować wykresy funkcji:
(a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$; (b) $g(x) = \arcsin(\sin x)$.

**Rozwiązanie.**
(a) Dziedziną funkcji $f(x) = \sin(\arcsin x)$ jest przedział $[-1,1]$. Dla $x \in [-1,1]$ mamy

$$f(x) = \sin(\arcsin x) = x.$$

Równość ta wynika bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej. Wykres funkcji $f$ przedstawiono na rysunku.



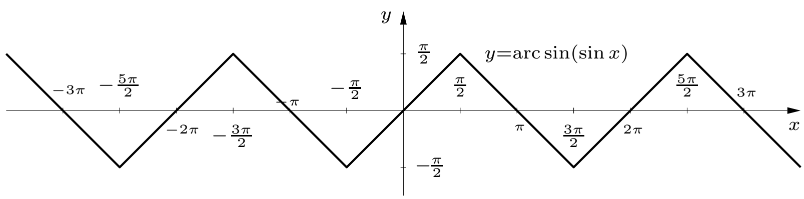

(b) Dziedziną funkcji $g(x) = \arcsin(\sin x)$ jest $\mathbb{R}$. Funkcja ta jest okresowa i ma okres $T = 2\pi$. Wykres funkcji $g$ wystarczy sporządzić np. na przedziale $[-\pi/2, 3\pi/2]$. Dla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ mamy $g(x) = x$. Równość ta wynika bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej. Dla $x \in (\pi/2, 3\pi/2]$ mamy $x = \pi + u$, gdzie $u \in (-\pi/2, \pi/2]$. Stąd

$$\begin{aligned} g(x) &= \arcsin(\sin x) = \arcsin[\sin(\pi+u)] = \arcsin(-\sin u) \\ &= -\arcsin(\sin u) = -u = \pi - x. \end{aligned}$$

Na przedziale $[-\pi/2, 3\pi/2]$ funkcja $g$ jest określona wzorem:

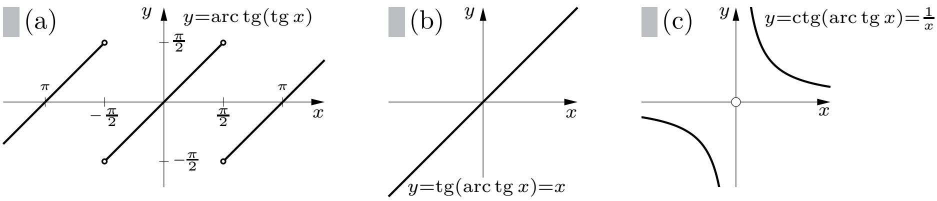
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [-\pi/2, \pi/2], \\ \pi - x & \text{dla } x \in (\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases}$$

Korzystając teraz z okresowości funkcji $g$ możemy sporządzić jej wykres na $\mathbb{R}$.




**ZADANIE 1.8.** Naszkicować wykresy funkcji:
(a) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$; (b) $g(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$; (c) $h(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x)$.

**Odpowiedzi.**




### PRZYKŁAD 1.9.

(a) Na parterze wielopiętrowego budynku z windą jest $m$ mieszkań, a na każdym piętrze jest po $r$ mieszkań. Znaleźć funkcję określającą numer przycisku w windzie, który trzeba nacisnąć, aby dojechać do piętra z mieszkaniem o numerze $n$. Narysować wykres tej funkcji dla $m = 4$ oraz $r = 3$.

(b) Podać wzór określający ilość cyfr liczby naturalnej $n$ w jej zapisie dwójkowym.

(c) Za wezwanie taxi pasażer płaci 6 zł, a za każde przejechane 500 m trasy 3 zł. Znaleźć funkcję wskazującą opłatę za przejazd taksówką $x$ metrów.

**Rozwiązanie.**

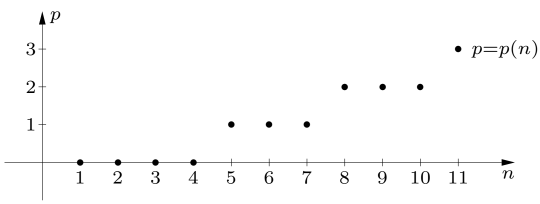
(a) Funkcja $p$ wskazująca numer piętra, na którym jest mieszkanie o numerze $n$, ma postać

$$p(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant m, \\ \left\lfloor \dfrac{n-m-1}{r} \right\rfloor + 1 & \text{dla } n > m, \end{cases}$$

gdzie $\lfloor u \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby $u$. Dla danych z zadania funkcja ta ma postać

$$p(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant 4, \\ \left\lfloor \dfrac{n-5}{3} \right\rfloor + 1 & \text{dla } n > 4 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Wykres funkcji $p$ przedstawiono na rysunku.




(b) Niech $k$ oznacza ilość cyfr liczby naturalnej $n$ w układzie dwójkowym. Wtedy

$$2^{k-1} \leqslant n < 2^k.$$

Stąd $k - 1 \leqslant \log_2 n < k$. Zatem $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

(c) Najpierw określimy liczbę odcinków 500 m na trasie długości $x$ metrów. Pełnych odcinków jest $\lfloor x/500 \rfloor$. Po uwzględnieniu kwoty 6 zł za wezwanie taxi otrzymamy, że opłata za przejazd $x$ metrów wyniesie $6 + 3\lfloor x/500 \rfloor$ złotych.

**ZADANIE 1.9.** (a) Znaleźć wzór na zaokrąglanie liczb dodatnich do najbliższych całkowitych (np. $1.02 \approx 1$, $4.5 \approx 5$, $7.83 \approx 8$, $0.29 \approx 0$).

(b) Nowy Rok wypadł w poniedziałek. Znaleźć wzór wskazujący, który dzień tygodnia wypada $n$–tego dnia tego roku.

(c) Bankomat wypłaca pieniądze w banknotach o nominałach 200, 100, 50, 20 oraz 10 zł, przy czym zawsze wydaje minimalną liczbę banknotów. Znaleźć wzory określające liczbę banknotów o nominałach 200 i 100 zł w zależności od wypłacanej kwoty.

(d) W zegarku elektronicznym impuls jest generowany co sekundę. Korzystając z funkcji część całkowita zapisać aktualny czas w postaci $gg : mm : ss$ w zależności od liczby $x$ impulsów. Rozważyć dwie możliwości (i) $00 \leqslant gg \leqslant 23$ oraz (ii) $00 \leqslant gg < 12$. Przyjąć, że generowanie impulsów rozpoczęto o północy.

(e) Znaleźć wzór określający przedostatnią cyfrę w zapisie dziesiętnym liczby naturalnej $n \geqslant 10$.

(f) Drukarka drukuje jednostronnie na jednej kartce 4 strony tekstu. Ile kartek należy przygotować, aby wydrukować $n$ stron tekstu?

**Odpowiedzi.** (a) $\lfloor x + 1/2 \rfloor$; (b) $n - 7\lfloor (n-1)/7 \rfloor$, 1 oznacza, że jest to poniedziałek, 2 - wtorek, …, 7 - niedziela; (c) $b_{200} = \lfloor x/200 \rfloor$, $b_{100} = \left\lfloor \dfrac{x - 200\lfloor x/200 \rfloor}{100} \right\rfloor$, gdzie $x$ jest wybieraną kwotą;

(d) (i) $\begin{cases} ss = x - \lfloor x/60 \rfloor \cdot 60, \\ mm = \lfloor x/60 \rfloor - \lfloor x/3600 \rfloor \cdot 60, \\ gg = \lfloor x/3600 \rfloor - \lfloor x/86400 \rfloor \cdot 24; \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} ss = x - \lfloor x/60 \rfloor \cdot 60, \\ mm = \lfloor x/60 \rfloor - \lfloor x/3600 \rfloor \cdot 60, \\ gg = \lfloor x/3600 \rfloor - \lfloor x/43200 \rfloor \cdot 12; \end{cases}$

(e) $c(n) = \lfloor n/10 \rfloor - 10 \left\lfloor \dfrac{\lfloor n/10 \rfloor}{10} \right\rfloor$; (f) $\lfloor (n+3)/4 \rfloor$.