ANALIZA
MATEMATYCZNA 1

Marian Gewert   Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Kolokwia i egzaminy

Wydanie dziewiętnaste powiększone

GiS

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2024

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–67234–10–8

Wydanie XIX powiększone, Wrocław 2024
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp

Opracowanie jest trzecią częścią zestawu podręczników do Analizy matematycznej 1. Pozostałymi częściami zestawu są *„Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory”* oraz *„Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania”*.

Książka zawiera zadania, które w ubiegłych latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na kolokwiach i egzaminach z Analizy matematycznej 1. Zadania obejmują rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej wraz z zastosowaniami w fizyce i technice. Do wszystkich zestawów kolokwialnych oraz do zestawów egzaminacyjnych o numerach nieparzystych podane są odpowiedzi.

Opracowanie pozwala studentom zapoznać się z rodzajami oraz stopniem trudności zadań kolokwialnych i egzaminacyjnych. Jest to jednocześnie dodatkowy materiał do samodzielnej nauki. Zadania z tego zbioru mogą być wykorzystywane przez wykładowców i prowadzących ćwiczenia przy układaniu zestawów na kolokwia i egzaminy.

Studentów Politechniki Wrocławskiej zainteresowanych udziałem w konkursie matematycznym „Egzamin na ocenę celującą” zachęcamy do zapoznania się z książką *„Studencki konkurs matematyczny”*. Opracowanie zawiera zadania wraz z rozwiązaniami z konkursów, które odbyły się w latach 1994 – 2021.

Obecne wydanie książki powiększyliśmy o tematyczny zestaw zadań. Do każdego tematu kursu analiza matematyczna 1 przypisaliśmy zadania z kolokwiów i egzaminów. Ułatwia to znalezienie zadań o wybranej tematyce.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za zestawy zadań z kolokwiów i egzaminów, a także za uwagi o poprzednich wydaniach.

Marian Gewert *Zbigniew Skoczylas*

Zestawy zadań z kolokwiów

Kolokwium pierwsze

Zestaw 1.

odp. str. 90

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+4n^2+3n+2}-n-1\right)$.

2. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x^2$.

3. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x+2|} & \text{dla} \quad x<0,\\ b & \text{dla} \quad x=0,\\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{ax} & \text{dla} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0=0$.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x)=x\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x^2}$.

5. Obliczyć z definicji pochodną funkcji $f(x)=\sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0\neq 0$.

Zestaw 2.

odp. str. 90

1. Obliczyć z definicji pochodną funkcji $g(x)=3^x$ w punkcie x_0.

2. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2\dfrac{1}{x^2}$.

3. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}-1-\dfrac{1}{x}$.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-3^n}{4^n+5^n}$.

Obecnie na obu kolokwiach studenci otrzymują do rozwiązania w czasie 60 minut po 4 zadania.

5. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja g określona wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{\sin 2x} & \text{dla} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < 0, \\ b & \text{dla} \quad x = 0, \\ x^2 + x + 1 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

Zestaw 3.

odp. str. 90

1. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

2. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla} \quad x < 0, \\ b & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{\arcsin x}{ax} & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

3. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n+6}{n+3} \right)^{4n+2}$.

5. Obliczyć z definicji pochodną funkcji $f(x) = \cos x$ w punkcie x_0.

Zestaw 4.

odp. str. 90

1. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja g określona wzorem

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla} \quad x < 1, \\ b & \text{dla} \quad x = 1, \\ x^2 + ax + 1 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + \sin n}$.

3. Obliczyć z definicji pochodną funkcji $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ w punkcie $x_0 \neq 0$.

4. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

5. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $g(x) = |x| + \dfrac{\sin x^2}{x}$.

Zestaw 5.

odp. str. 90

1. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+1}$.

3. Znaleźć kresy dolny i górny zbioru $A = \left\{\frac{(-1)^n}{3n+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Odpowiedź uzasadnić.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3 + \operatorname{tg} x}$.

5. Czy można tak dobrać parametry a i b, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{a}{x^3} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ b & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw 6.

odp. str. 91

1. Obliczyć granicę ciągu $b_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n + \frac{1}{n}}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{2-3n}$.

3. Wyznaczyć dziedzinę naturalną oraz zbiór wartości funkcji

$$f(x) = 2 \arcsin \frac{1 - |x|}{2}.$$

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

5. Czy można tak dobrać parametry a i b, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \exp\left(\dfrac{x}{1-x}\right)} & \text{dla} \quad x \neq 0 \ \text{ oraz } \ x \neq 1, \\ a & \text{dla} \quad x = 0, \\ b & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw 7.
odp. str. 91

1. Obliczyć granicę ciągu $c_n = \sqrt[n]{1^{10} + 2^{10} + \ldots + n^{10}}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{2n-1}$.

3. Niech $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{2}x$ oraz $g(x) = \lfloor x \rfloor$. Napisać wzory określające funkcje złożone $f \circ g$, $g \circ f$ oraz narysować ich wykresy.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+\sin\dfrac{1}{2x}} - 1\right)$.

5. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ a & \text{dla} \quad x = 0, \\ b + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

Zestaw 8.
odp. str. 91

1. Obliczyć granicę ciągu $d_n = \dfrac{4^{n+1} - 5^{n+2}}{5^n - 4^n}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n-2}$.

3. Uzasadnić, że granica $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{\sin\frac{1}{x}}$ nie istnieje.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+7^x)}{\ln(1+6^x)}$.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} b + 3(x-1)^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ x\sin\dfrac{a}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw 9.
odp. str. 91

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+5n+1} - \sqrt[3]{n^3+5n}\right)$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{2x+1}$.

3. Dobrać parametr a tak, aby funkcja f dana wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{dla} \quad x\leqslant 1,\\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x>1\end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

4. Korzystając z twierdzenia Bolzana uzasadnić, że równanie $4^x=\dfrac{2}{x}$ ma w przedziale $[1/2,1]$ dokładnie jedno rozwiązanie.

5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$ w punkcie $(0,f(0))$.

Zestaw 10.

odp. str. 91

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5}+1}{\sqrt{n^5+1}+1}$.

2. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić równość

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

3. Dobrać parametr a tak, aby funkcja f dana wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+a & \text{dla} \quad x\leqslant 0,\\ \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & \text{dla} \quad x>0\end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

4. Korzystając z twierdzenia Bolzana uzasadnić, że równanie $\ln x+2x=1$ ma w przedziale $[1/2,1]$ dokładnie jedno rozwiązanie.

5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\sqrt{x}\cos(x-1)$ w punkcie $(1,f(1))$.

Zestaw 11.

odp. str. 91

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+(-1)^n}{5n+1}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x-5}-2}{x-9}$.

3. Dobrać parametr a tak, aby funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + x + a & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

4. Korzystając z twierdzenia Bolzana uzasadnić, że równanie $\ln(x+1)+x = 1$ ma w przedziale $[0, 1]$ dokładnie jedno rozwiązanie.

5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{e^x + x}$ w punkcie $(0, f(0))$.

Zestaw 12.

odp. str. 91

1. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} [5 + (-1)^n]^n$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{5x^5} - \sqrt{3x^3}}{2x^2}$.

3. Dobrać parametr a tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + a & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ (1 + x)^{\frac{1}{x}} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

4. Korzystając z twierdzenia Bolzana uzasadnić, że równanie $3^x + x = 3$ w przedziale $[0, 1]$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \ln\sqrt{x + 1}$ w punkcie $(0, f(0))$.

Zestaw 13.

odp. str. 92

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$.

2. Zbadać jednostronną ciągłość w punkcie $x_0 = \pi$ funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x < \pi, \\ 1 & \text{dla} \quad x = \pi, \\ \dfrac{\sin x}{\pi - x} & \text{dla} \quad x > \pi. \end{cases}$$

3. Obliczyć kąt, pod którym wykresy funkcji $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$ przecinają się we wnętrzu pierwszej ćwiartki układu współrzędnych.

4. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $f(x) = \dfrac{x^2-1}{e^x}$ jest rosnąca. Czy funkcja ta ma asymptoty?

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Zestaw 14.

odp. str. 92

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n+1}\right)^{9n+7}$.

2. Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} - a & \text{dla} \quad x < 0, \\ b & \text{dla} \quad x = 0, \\ \sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

3. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = 3^{-x}$. Styczną wystawić w punkcie $\left(x_0, \sqrt{3}\right)$ wykresu.

4. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $f(x) = x^2 \ln x$ jest malejąca. Czy funkcja ta ma asymptoty?

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2\operatorname{arc\,tg} x + \pi\right)\right]$.

Zestaw 15.

odp. str. 92

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9^n+3^n} - \sqrt{9^n+1}\right)$.

2. Zbadać jednostronną ciągłość w punkcie $x_0 = 0$ funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{\sin x}{x^2} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Odpowiedź uzasadnić.

3. Obliczyć kąt, pod którym wykres funkcji $f(x) = e^{\sqrt{3}x} - 1$ przecina oś Ox.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ oraz wyznaczyć przedziały, na których funkcja ta jest malejąca.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

Zestaw 16.

odp. str. 92

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + 3^n + \pi^n}$.

2. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} q \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x} + 1 & \text{dla} \quad x < 0, \\ p & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{\sin x^2}{x} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Dobrać parametry p i q tak, aby funkcja ta była ciągła na $\mathbb{R}$.

3. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 3 - x^2$, która tworzy kąt $\pi/3$ z dodatnią częścią osi Ox.

4. Znaleźć asymptoty i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - \cos x}{x^2}$.

Zestaw 17.

odp. str. 92

1. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^3}$.

2. Wyznaczyć kąt, pod jakim oś Ox jest przecięta przez wykres funkcji

$$f(x) = xe^{\frac{x}{2}}.$$

3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sin 211^\circ$.

4. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)^{n+2}$.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b, funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a + \operatorname{arc\,ctg} x & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ x^2 + b & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}$?

Zestaw 18.

odp. str. 92

1. Obliczyć $f''(1)$ dla funkcji $f(x) = \cos \ln x + \sin \ln x$.

2. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{arc\,tg} x}$.

3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\ln 0.99$.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^n}{1+2^n+3^n}$.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b, funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a+3(x-1)^3 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ x \sin \dfrac{b}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw 19.

odp. str. 92

1. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0 = 2$.

2. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(-x^2\right)$ w punkcie $(1, f(1))$.

3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\cos 209^\circ$.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin 3x - 5\sin 5x}{x}$.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2+b+2 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ a + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw 20.

odp. str. 93

1. Obliczyć drugą pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

2. Dla jakich wartości parametrów a i b wykres funkcji $f(x) = -x^2+ax+b$ jest styczny do prostej $y = x$ w punkcie $(-1,-1)$?

3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\operatorname{arc\,ctg} 0.999.$$

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n+5^{-n}}$.

5. Dla jakich wartości parametru a, funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a + \dfrac{2\sin x}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ \sqrt{x} + a^2 & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw 21.

odp. str. 93

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sin\dfrac{3}{n}\right)^{2n}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\ln x - \ln(\sin 2x)\right]$.

3. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{3x^3}{2x^2 + x}$.

4. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f była ciągła na $\mathbb{R}$, jeżeli:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x < -1, \\ \arcsin x + a & \text{dla} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \dfrac{e^{2x} - 1}{x} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

5. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = x^{\cos x} + \dfrac{3}{x}$.

Zestaw 22.

odp. str. 93

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\cos\dfrac{3}{\sqrt{n}} - 1\right)$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 1} x^{\operatorname{ctg}(1-x)}$.

3. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f była ciągła na $\mathbb{R}$, jeżeli:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x < 1, \\ \log_a x & \text{dla} \quad 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ \dfrac{\pi}{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x-4}} & \text{dla} \quad x > 4. \end{cases}$$

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + 3x$.

5. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \left(\ln x \cdot \operatorname{tg} x\right)^2$.

Zestaw 23.

odp. str. 93

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{2n}+3^n}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$.

3. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f była ciągła na $\mathbb{R}$, jeżeli:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ bx + 1 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \operatorname{arc\,tg} x & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x^3+1}{2x^2-3x}$.

5. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sqrt[3]{2\ln x + e^x}$.

Zestaw 24.

odp. str. 93

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^3+1}}{n\sqrt{3n-2}}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{x\sin x}{\cos x + 1}$.

3. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f była ciągła na $\mathbb{R}$, jeżeli:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{a} & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{\arcsin x}{\pi x} & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ \dfrac{x}{2b} & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$.

5. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = 1 + \dfrac{\arcsin x}{\ln x}$.

Zestaw 25.

odp. str. 93

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 5^n + 3^n \sin^2 n}.$$

2. Określić dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{1}{2} \arccos\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)$. Naszkicować wykres tej funkcji.

3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla} \quad x < 2, \\ x + 10 & \text{dla} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 2$? Odpowiedź uzasadnić.

5. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2$ w punkcie o odciętej $x_0 = \sqrt{3}$.

Zestaw 26.

odp. str. 93

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+5}{2n+1}\right)^{6n+3}$.

2. Wyznaczyć równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ w punktach jego przecięcia z hiperbolą $g(x) = \frac{1}{1+x}$.

3. Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność w punkcie $x_0 = 0$ funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

4. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = 2x - \arccos\frac{1}{x}$.

5. Wykazać, że w przedziale $(1/2, 1)$ istnieje dokładnie jeden pierwiastek równania

$$e^{2x^2+x} = \frac{2}{x}.$$

Zestaw 27.

odp. str. 94

1. Podać definicję ciągłości funkcji. Zbadać ciągłość funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$. Po wyznaczeniu asymptot naszkicować wykres tej funkcji.

2. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n} + 3^{-n} + 6^{-n}}.$$

3. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}$ w punkcie $(1, f(1))$.

4. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ w punkcie $x_0 = 4$.

5. Wykazać, że równanie $x^3+ax^2+bx+c=0$, gdzie $a,b,c \in \mathbb{R}$, ma pierwiastek rzeczywisty.

Zestaw 28.

odp. str. 94

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{16n^2+5n+4}-4n\right)$.

2. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 3$.

3. Dla jakiej wartości parametru a, funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a + 3(x-1)^3 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ x\cos\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$?

4. Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{3}{2}x\ln\left(e - \dfrac{1}{3x}\right)$.

5. Określić dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

Zestaw 29.

odp. str. 94

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\pi}(1+2\sin x)^{\frac{1}{\pi-x}}$.

2. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność ciągu

$$a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+n}.$$

3. Uzasadnić, że równanie $3^x + x^3 = 0$ ma w przedziale $(-1, -1/2)$ dokładnie jeden pierwiastek.

4. Dobrać stałą a tak, aby funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ a & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 0$. Następnie zbadać jej różniczkowalność w tym punkcie.

5. Napisać równanie stycznej do krzywej $f(x) = (1+\sqrt{x})^{\ln\sqrt{x}}$ w punkcie $(1, f(1))$.

Zestaw 30.

odp. str. 94

1. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać zbieżność ciągu

$$a_n = \left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

2. Uzasadnić, że równanie $x^3 + x = -1$ ma w przedziale $(-1, 0)$ dokładnie jeden pierwiastek.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{5}\right)^{\frac{1}{4x}}$.

4. Wyznaczyć stałą a tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{a} & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{ax}{e^x - 1} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$. Zbadać jej różniczkowalność w punkcie $x_0 = 0$.

5. Napisać równanie stycznej do krzywej $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}}$ w punkcie $(1, f(1))$.

Zestaw 31.

odp. str. 94

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n + 7^n + \cos^2 n}.$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-5}\right)^{2x+1}$.

3. Uzasadnić, że równanie $2x = \pi\sin x$ ma pierwiastek w przedziale $(\pi/4, 3\pi/4)$.

4. Dobrać parametr a tak, aby funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ a & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$. Następnie korzystając z definicji obliczyć $f'(0)$.

5. Dla funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ napisać równanie stycznej prostopadłej do prostej $6y - 2x - 1 = 0$.

Zestaw 32.

odp. str. 94

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+5}{n+3}\right)^{3n+1}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

3. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne funkcji $f(x) = 2x - \arccos \dfrac{1}{x}$.

4. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x) = |e^x - 1|$ na $\mathbb{R}$.

5. Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji:

$$f(x) = 4 - x, \qquad g(x) = 4 - \frac{x^2}{2}.$$

Zestaw 33.

odp. str. 95

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n} + 3^{-n} + 6^{-n}}.$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+3x+5}\right)$.

3. Dla funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{1/x} + \cos x}{3^{1/x} - a} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 3^x + 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

dobrać parametr a tak, aby była ona ciągła na $\mathbb{R}$.

4. Znaleźć asymptoty ukośne funkcji $f(x) = x \operatorname{arc\,tg} x^3$.

5. Uzasadnić, że równanie $3^x + x^3 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(-1, -1/2)$.

Zestaw 34.

odp. str. 95

1. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność ciągu

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)\sqrt[3]{8n^3+2}}{(5n+3)\sqrt{n^2+7}}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+3\cos x)^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}$.

4. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} b - e^{1/x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ a & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

5. Uzasadnić, że równanie $x^3 + x = -1$ ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(-1, 0)$.

Zestaw 35.

odp. str. 95

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{1}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2x^3)}{7x^3}$.

3. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x < -2, \\ |x^2 + x| & \text{dla} \quad |x| \leqslant 2, \\ a \log_2 x - bx & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

5. Uzasadnić, że równanie $xe^x = 1$ ma tylko jedno rozwiązanie w przedziale $(1/2, 1)$.

Zestaw 36.

odp. str. 95

1. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność ciągu

$$a_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+2} + \ldots + \frac{1}{5^n+n}.$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+5}{4n+7} \right)^n$.

3. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor 3e^x \rfloor + 2}{\lfloor 2e^x \rfloor + 1}.$$

4. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x = -1, \\ \dfrac{x^3 - 1}{|x^2 - 1|} & \text{dla} \quad |x| \neq 1, \\ 3 & \text{dla} \quad x = 1. \end{cases}$$

W przypadku nieciągłości określić jej rodzaj.

5. Znaleźć asymptoty ukośne funkcji $f(x) = xe^{1/x}$.

Zestaw 37.

odp. str. 95

1. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach wyznaczyć granicę ciągu

$$a_n = \frac{2n^3 + 1}{4n^2 + \cos n^2}.$$

2. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n! + n^3}{(n+3)! + 1}$.

3. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^x$.

4. Uzasadnić, że równanie $x2^x = 1$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni.

5. Sprawdzić, korzystając z definicji, czy istnieje pochodna funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 1}{\sin x} & \text{dla} \quad 0 < |x| < \pi, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$.

Zestaw 38.

odp. str. 95

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznaczyć granicę ciągu

$$a_n = \frac{2n^2 + \sin n}{3n^2 + (-1)^n}.$$

2. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{n-1}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$.

4. Dobrać stałą a tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{a(\pi-2x)} & \text{dla} \quad x<\dfrac{\pi}{2},\\ ax & \text{dla} \quad x\geqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

5. Zbadać, korzystając z definicji, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0=0$, jeżeli

$$f(x)=\begin{cases}\ln\cos x & \text{dla} \quad 0<|x|<\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{dla} \quad x=0.\end{cases}$$

Zestaw 39.

odp. str. 95

1. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach wyznaczyć granicę ciągu

$$a_n=(4-\operatorname{arc\,tg} n)^n .$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{3n^2}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)}{x^2}$.

4. Określić wartość funkcji $f(x)=x\operatorname{ctg} 5x$ w punkcie $x_0=0$ tak, aby funkcja ta była ciągła w tym punkcie.

5. Sprawdzić, korzystając z definicji, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0=0$, jeżeli

$$f(x)=\begin{cases}x^3\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{dla} \quad x=0.\end{cases}$$

Zestaw 40.

odp. str. 96

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznaczyć granicę ciągu

$$a_n=\sqrt[n]{n^2+\sin n} .$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+7^n}{4^n+5^n}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg} x\right)^{\frac{1}{2x}}$.

4. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{\sin ax}{e^{ax} - 1} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

5. Sprawdzić, korzystając z definicji, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0 = 0$, jeżeli

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin 5x}{\sin 3x} & \text{dla} \quad 0 < |x| < \dfrac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$