ANALIZA
MATEMATYCZNA 1

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie trzydzieste pierwsze uzupełnione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2024

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–67234–13–9

Wydanie XXXI uzupełnione, Wrocław 2024
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp

Niniejsza książka jest pierwszą częścią zestawu podręczników do Analizy matematycznej 1. Pozostałymi częściami są zbiory zadań *„Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania”* oraz *„Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy”*. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów oraz uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych i wojskowych.

Opracowanie zawiera definicje, twierdzenia i wzory z rachunku różniczkowego oraz całkowego funkcji jednej zmiennej wraz z zastosowaniami. Najważniejsze twierdzenia podane są wraz z dowodami. Wszystkie zagadnienia teoretyczne zakończono ćwiczeniami, przy czym początkowe z nich są z reguły najprostsze. Książka jest bogato ilustrowana (zawiera ponad 300 rysunków). Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza aktualny program przedmiotu. Tak samo oznaczono trudniejsze ćwiczenia. Dodatkowy materiał oraz trudniejsze ćwiczenia dołączono z myślą o studentach, którzy chcą rozszerzyć swoją wiedzę z analizy matematycznej. Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań z analizy zachęcamy do zapoznania się z książką *„Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami”*.

Równolegle do materiału omawianego na wykładzie studenci powinni przerabiać samodzielnie i na ćwiczeniach odpowiednio dobrane zadania. Takie zadania wraz z metodami ich rozwiązywania można znaleźć w zbiorze zadań *„Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania”*.

Ćwiczenia z tego podręcznika oraz przykłady i zadania z drugiej części zestawu są podobnych typów i mają ten sam stopień trudności jak zadania, które zwykle pojawiają na sprawdzianach i egzaminach. Zadania, które w poprzednich latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na sprawdzianach, są umieszczone w trzeciej części podręcznika.

Uzupełnieniem zestawu podręczników do Analizy matematycznej 1 jest książka pt. „*Przykłady i kontrprzykłady z analizy matematycznej*". Publikacja ta zawiera m.in. przykłady funkcji i ciągów o nieoczekiwanych własnościach oraz kontrprzykłady świadczące, że nie można osłabić założeń klasycznych twierdzeń.

Do tego wydania książki dodano definicję ciągu okresowego oraz kilka ćwiczeń nowych typów.

Serdecznie dziękujemy Pani dr Teresie Jurlewicz za przygotowanie odpowiedzi do ćwiczeń z wcześniejszych wydań. Szczególne podziękowania składamy Pani dr Jolancie Sulkowskiej oraz Panom dr. Maciejowi Burneckiemu, dr. Krzysztofowi Michalikowi, prof. dr. hab. Januszowi Mierczyńskiemu, prof. dr. hab. Krzysztofowi Stempakowi za liczne spostrzeżenia, które pozwalały ulepszać kolejne wydania. Dziękujemy także Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za wskazanie błędów w poprzednich wydaniach. Dziękujemy również Koleżankom i Kolegom z innych uczelni za komentarze dotyczące zakresu i sposobu ujęcia materiału. Uprzejmie prosimy wykładowców i studentów o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o dostrzeżonych błędach i usterkach.

Marian Gewert *Zbigniew Skoczylas*

1. Zbiory i funkcje liczbowe

Na początku tego rozdziału definiujemy zbiory ograniczone na prostej oraz ich kresy. Następnie wprowadzamy funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej oraz związane z tym pojęcia: argument i wartość funkcji, dziedzina i dziedzina naturalna funkcji, wykres, zbiór wartości. Ponadto, omawiamy różne rodzaje funkcji (parzyste, nieparzyste, okresowe, „na”, ograniczone, monotoniczne). W kolejnej części rozdziału definiujemy złożenie funkcji, funkcję różnowartościową oraz funkcję odwrotną. Następnie wprowadzamy funkcje cyklometryczne, czyli funkcje odwrotne do trygonometrycznych. W dalszej części podajemy określenie podstawowych funkcji elementarnych i omawiamy ich najważniejsze własności. Na końcu rozdziału prezentujemy funkcje nieelementarne: signum, część całkowita, część ułamkowa, funkcja Dirichleta.

1.1. Zbiory ograniczone i kresy

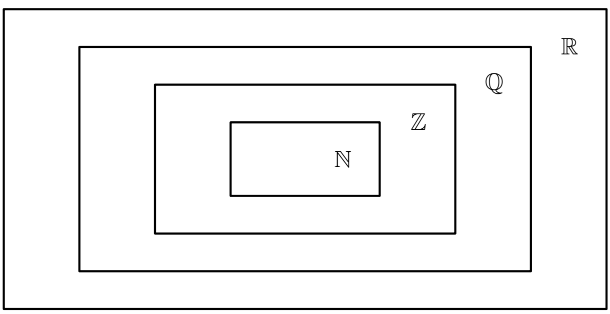
W podręczniku będziemy stosowali następujące oznaczenia zbiorów liczbowych:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ — zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ — zbiór liczb wymiernych,

$\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych.



Rys. 1.1. Relacje $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Ćwiczenie 1.1. Uzasadnić, że podane liczby są niewymierne:

(a) $\sqrt{5}$; (b) $\log_2 3$; (c) $\cos\dfrac{\pi}{8}$; (d) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; (e*) $\operatorname{tg} 1^\circ$.

Ćwiczenie 1.2. Udowodnić, że między liczbami wymiernymi w_1, w_2 $(w_1 < w_2)$ leży liczba:
(a) wymierna; (b) niewymierna.

Definicja 1.3. *(zbiory ograniczone)*

• Mówimy, że zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony z dołu*, jeżeli istnieje liczba rzeczywista m taka, iż nierówność $m \leqslant x$ jest prawdziwa dla każdego $x \in X$. Liczbę m nazywamy *ograniczeniem dolnym* zbioru X.

• Podobnie mówimy, że zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony z góry*, jeżeli istnieje liczba rzeczywista M taka, iż nierówność $x \leqslant M$ jest prawdziwa dla każdego $x \in X$. Liczbę M nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru X.

• Z kolei mówimy, że zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony*, gdy jest ograniczony z dołu i z góry. Zbiór, który nie jest ograniczony, nazywamy *nieograniczonym.*

Ćwiczenie 1.4. Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z dołu, z góry, ograniczone:
(a) $X = \{2, 4, 6, \ldots\}$; (b) $X = (-\infty, 0]$;

(c) $X = \left\{\dfrac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N} \text{ oraz } p < q\right\}$; (d) $X = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 > 0\right\}$.

Definicja 1.5. *(kresy zbiorów)*

• Niech zbiór $X \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Największą liczbę ograniczającą zbiór X z dołu nazywamy jego *kresem dolnym* i oznaczamy symbolem $\inf X$. Jeżeli X nie jest ograniczony z dołu, to przyjmujemy $\inf X = -\infty$.

• Niech zbiór $X \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Najmniejszą liczbę ograniczającą zbiór X z góry nazywamy jego *kresem górnym* i oznaczamy symbolem $\sup X$. Jeżeli X nie jest ograniczony z góry, to przyjmujemy $\sup X = \infty$.

Uwaga. Każdy niepusty zbiór ograniczony z dołu ma kres dolny, a zbiór ograniczony z góry – kres górny. Fakt ten nazywamy *aksjomatem ciągłości.*

Ćwiczenie 1.6. Znaleźć kresy dolne i górne zbiorów:

(a) $X = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{5}\right]$; (b) $X = \{(-3)^n : n \in \mathbb{N}\}$;

(c) $X = \{-1\} \cup (0, \infty)$; (d) $X = \left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

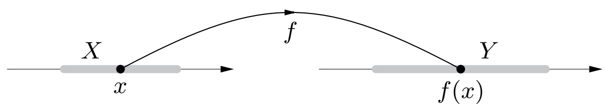
Ćwiczenie 1.7. (a) Niech L oznacza zbiór obwodów wielokątów wypukłych wpisanych w okrąg o promieniu 1. Wyznaczyć $\inf L$ oraz $\sup L$.

(b) Niech V oznacza zbiór ułamków dziesiętnych postaci $0, c_1 c_2 c_3 \ldots$ takich, że $c_n \neq 9$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć $\inf V$ oraz $\sup V$.

1.2. Funkcje – podstawowe określenia

Definicja 1.8. *(funkcja, dziedzina, przeciwdziedzina)*

Funkcją określoną na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ i przyjmującą wartości ze zbioru $Y \subset \mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ tylko jednego elementu $y \in Y$. Elementy zbioru X nazywamy *argumentami* funkcji. Element $y \in Y$ odpowiadający argumentowi $x \in X$ nazywamy *wartością funkcji* f w punkcie x i oznaczamy przez $f(x)$. Zbiór X nazywamy *dziedziną*, a Y – *przeciwdziedziną* funkcji. Funkcje oznaczamy literami f, g, h itp. Wtedy piszemy $f : X \longrightarrow Y$ i zbiór X z reguły oznaczamy symbolem D_f.



Rys. 1.2. Funkcja $f : X \longrightarrow Y$

Zbiór wszystkich $f(x)$ dla $x \in D_f$ nazywamy *zbiorem wartości* funkcji f i oznaczamy przez W_f. Oczywiście $W_f \subset Y$.

Uwaga. Jeżeli dany jest tylko wzór, który ma określać funkcję, to zbiór tych elementów z $\mathbb{R}$, dla których ma on sens, nazywamy *dziedziną naturalną* funkcji.

Ćwiczenie 1.9. Wyrazić:

(a) objętość V sześcianu jako funkcję jego pola powierzchni P;

(b) pole P koła jako funkcję jego obwodu O.

Ćwiczenie 1.10. Dla podanych funkcji obliczyć wskazane wartości:

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $f(-1)$, $f(2a)$, $f(x+1)$;

(b) $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $f\,(1.5)$, $f\left(0.5\,b^2\right)$, $f\,(x - 0.5)$;

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{dla } \ x < 0, \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{dla } \ x \geqslant 0, \end{cases} \qquad f(-1),\ f(0),\ f\left(\dfrac{1}{2}\right).$

Ćwiczenie 1.11. Określić dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$; (b) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; (c) $f(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{x-2}$;

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 8}$; (e) $f(x) = \operatorname{ctg}(\pi x)$; (f) $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(x-3)}$.

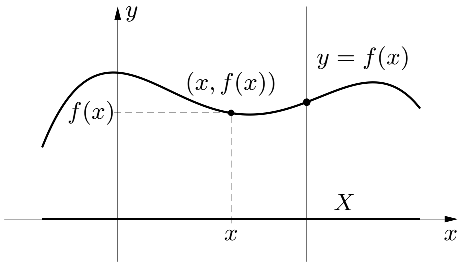
Ćwiczenie 1.12. Wyznaczyć zbiory wartości funkcji:

(a) $f(x) = 1 - x^2$; (b) $f(x) = 2^{x+1}$; (c) $f(x) = 5 - \sin x$.

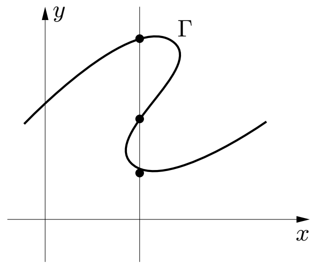
Definicja 1.13. *(wykres funkcji)*

Wykresem funkcji $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy zbiór wszystkich punktów $(x, f(x))$ płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, gdy $x \in X$, czyli

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X,\ y = f(x)\Big\}.$$

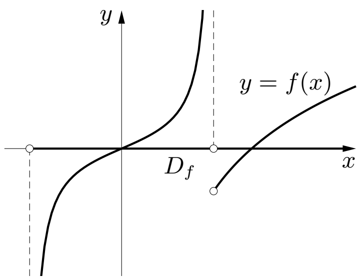


Rys. 1.3. Wykres funkcji

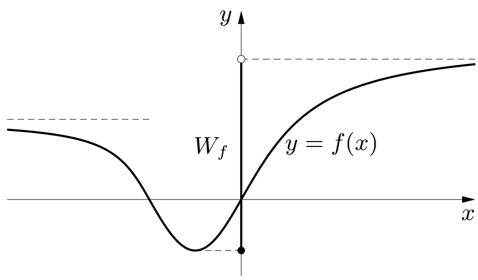


Rys. 1.4. Zbiór Γ nie jest wykresem funkcji postaci $y = f(x)$

Uwaga. Podzbiór Γ płaszczyzny xOy jest wykresem pewnej funkcji zmiennej x, gdy każda prosta pionowa przecina go co najwyżej w jednym punkcie. Rzut prostokątny wykresu funkcji na oś Ox jest dziedziną tej funkcji, a rzut na oś Oy jest zbiorem jej wartości.



Rys. 1.5. Dziedzina funkcji



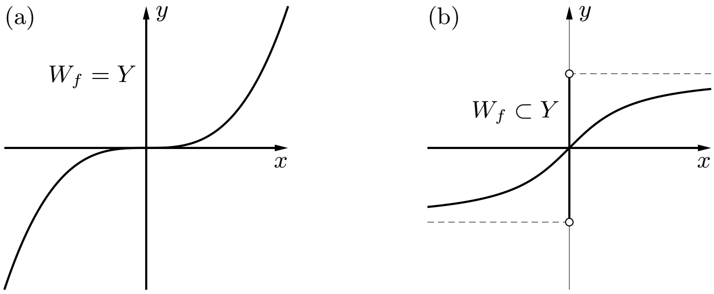
Rys. 1.6. Zbiór wartości funkcji

Ćwiczenie 1.14. Narysować wykresy funkcji:

(a) $f(x) = 2x - 1$; (b) $f(x) = x^2 - 4$; (c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; (d) $f(x) = \sqrt{x}$.

Definicja 1.15. *(funkcja „na")*

Mówimy, że funkcja f odwzorowuje zbiór X „na" zbiór Y, co notujemy $f : X \xrightarrow{na} Y$, jeżeli $W_f = Y$. Tzn., gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje argument $x \in X$ taki, że $y = f(x)$. Geometrycznie: funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest „na", gdy rzut prostokątny jej wykresu na oś Oy pokrywa się ze zbiorem Y.



Rys. 1.7. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (a) jest „na”, (b) nie jest „na”

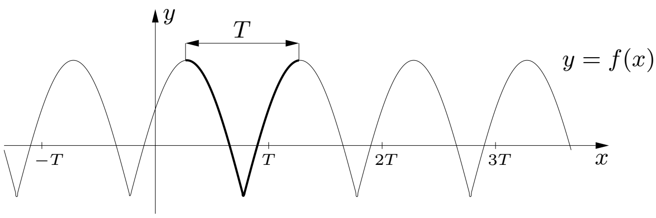
Ćwiczenie 1.16. Zbadać, czy funkcje $f : X \longrightarrow Y$ są „na”:

(a) $f(x) = x^2$, $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, \infty)$; (b) $f(x) = \sin x$, $X = [0, 2\pi)$, $Y = [-1, 1]$;

(c) $f(x) = 2^x$, $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, \infty)$; (d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $X = (0, \infty)$, $Y = [2, \infty)$.

Definicja 1.17. *(funkcja okresowa)*

Mówimy, że funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *okresowa*, jeżeli istnieje liczba dodatnia T taka, że dla każdego $x \in X$ także $x \pm T \in X$ oraz $f(x + T) = f(x)$. Liczbę T nazywamy *okresem funkcji* f. Jeżeli istnieje najmniejszy okres funkcji, to nazywamy go *okresem podstawowym*. Obrazowo: funkcja jest okresowa, gdy jej wykres po przesunięciu o wektor $(\pm T, 0)$ nałoży się na siebie.



Rys. 1.8. Wykres funkcji okresowej

Ćwiczenie 1.18. Uzasadnić, że podane funkcje są okresowe oraz znaleźć ich okresy podstawowe:

(a) $f(x) = \cos 3x$; (b) $f(x) = |\sin 2x|$;

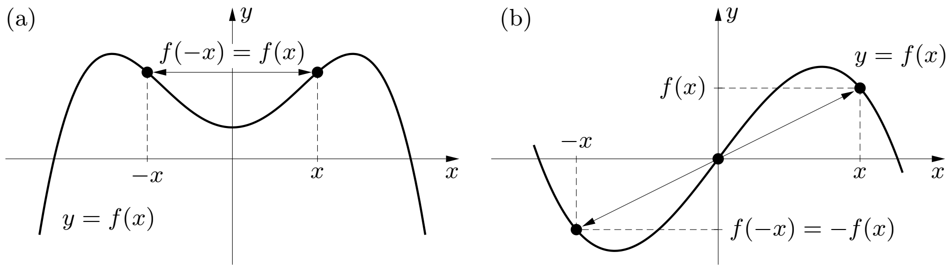
(c) $f(k) = (-1)^k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$; (d) $f(x) = \sqrt[4]{\operatorname{tg} \dfrac{x}{3}}$.

Definicja 1.19. *(funkcje parzysta i nieparzysta)*

• Mówimy, że funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *parzysta*, jeżeli dla każdego $x \in X$ także $-x \in X$ oraz $f(-x) = f(x)$. Obrazowo: funkcja jest parzysta, gdy oś Oy jest osią symetrii jej wykresu.

• Podobnie mówimy, że funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *nieparzysta*, jeżeli dla każdego

$x \in X$ także $-x \in X$ oraz $f(-x) = -f(x)$. Obrazowo: funkcja jest nieparzysta, gdy początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii jej wykresu.



Rys. 1.9. Wykres funkcji (a) parzystej, (b) nieparzystej

Ćwiczenie 1.20. Zbadać parzystość funkcji:

(a) $f(x) = |\sin x|$; (b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; (c) $f(x) = 3^x - 3^{-x}$; (d) $f(x) = x^4 - 3x^2$;

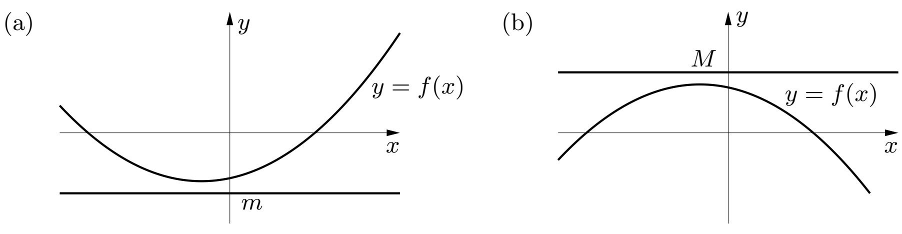
(e) $f(x) = \dfrac{2+x^2}{x^5}$; (f) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x$; (g) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; (h) $f(x) = x|x|$.

Ćwiczenie* 1.21. Pokazać, że każda funkcja, o symetrycznej względem zera dziedzinie, jest sumą funkcji parzystej i nieparzystej. Uzasadnić, że przedstawienie to jest jednoznaczne.

Definicja 1.22. *(funkcje ograniczone)*

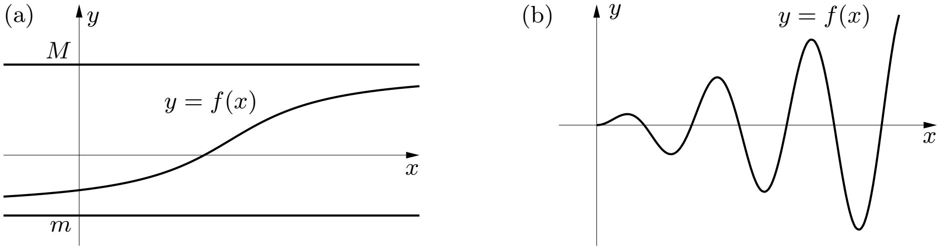
• Mówimy, że funkcja f jest *ograniczona z dołu* na zbiorze $D \subset D_f$, jeżeli istnieje liczba m taka, że nierówność $f(x) \geqslant m$ jest prawdziwa dla każdego $x \in D$. Obrazowo: funkcja jest ograniczona z dołu, gdy jej wykres leży nad pewną prostą poziomą.

• Podobnie mówimy, że funkcja f jest *ograniczona z góry* na zbiorze $D \subset D_f$, jeżeli istnieje liczba M taka, że nierówność $f(x) \leqslant M$ jest prawdziwa dla każdego $x \in D$. Obrazowo: funkcja jest ograniczona z góry, gdy jej wykres leży pod pewną prostą poziomą.



Rys. 1.10. Wykres funkcji ograniczonej (a) z dołu, (b) z góry

• Z kolei mówimy, że funkcja f jest *ograniczona* na zbiorze $D \subset D_f$, jeżeli jest ograniczona z dołu i z góry na tym zbiorze. Obrazowo: funkcja jest ograniczona, gdy jej wykres jest położony między dwiema prostymi poziomymi. Funkcję, która nie jest ograniczona, nazywamy *nieograniczoną*.



Rys. 1.11. Wykres funkcji (a) ograniczonej, (b) nieograniczonej

Ćwiczenie 1.23. Zbadać, czy podane funkcje są ograniczone z dołu, z góry, ograniczone na wskazanych zbiorach:

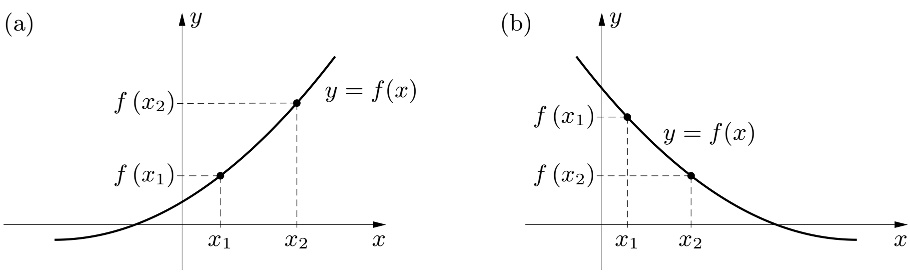
(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $\mathbb{R}$; (b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$; (c) $f(x) = 1 - |x|$, $\mathbb{R}$;

(d) $f(x) = x^2$, $[2, \infty)$; (e) $f(x) = 2^x$, $(-\infty, 0]$; (f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $(1, 3]$.

Definicja 1.24. *(funkcje monotoniczne)*

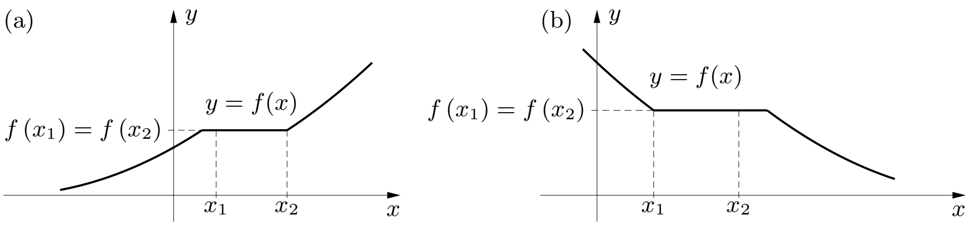
• Mówimy, że funkcja f jest *rosnąca* na zbiorze $D \subset D_f$, jeżeli dla dowolnych x_1, x_2 z tego zbioru z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) < f(x_2)$. Obrazowo: funkcja jest rosnąca, gdy poruszając się w prawo po jej wykresie wznosimy się.

• Podobnie mówimy, że funkcja f jest *malejąca* na zbiorze $D \subset D_f$, jeżeli dla dowolnych x_1, x_2 z tego zbioru z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$. Obrazowo: funkcja jest malejąca, gdy poruszając się w prawo po jej wykresie opadamy.



Rys. 1.12. Wykres funkcji (a) rosnącej, (b) malejącej

Uwaga. Jeżeli w definicjach ostre nierówności między wartościami funkcji zastąpimy słabymi, to otrzymamy określenia funkcji odpowiednio *niemalejących* i *nierosnących.* Funkcje rosnące, malejące, nierosnące oraz niemalejące nazywamy *monotonicznymi.* Przy czym funkcje rosnące i malejące nazywamy *ściśle monotonicznymi*, a niemalejące i nierosnące – *słabo monotonicznymi.*



Rys. 1.13. Wykres funkcji (a) niemalejącej, (b) nierosnącej

Ćwiczenie 1.25. Korzystając z definicji zbadać monotoniczność funkcji na wskazanych przedziałach:

(a) $f(x) = x^2$, $(-\infty, 0]$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $(0, \infty)$;

(c) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $[-1, \infty)$; (d) $f(x) = 1 + 2x$, $(-\infty, \infty)$.

Ćwiczenie 1.26. Pokazać, że

(i) suma funkcji monotonicznych jednego rodzaju jest funkcją monotoniczną tego samego rodzaju;

(ii) iloczyn dodatnich funkcji monotonicznych jednego rodzaju jest funkcją monotoniczną tego samego rodzaju;

(iii) funkcja przeciwna do funkcji monotonicznej jednego rodzaju jest funkcją monotoniczną przeciwnego rodzaju;

(iv) odwrotność dodatniej funkcji monotonicznej jest funkcją monotoniczną przeciwnego rodzaju.

Korzystając z tego określić rodzaj monotoniczności funkcji na przedziale $(0, \infty)$:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$; (b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3}$; (c) $f(x) = x^2 3^x$; (d) $f(x) = e^x - e^{-x}$.

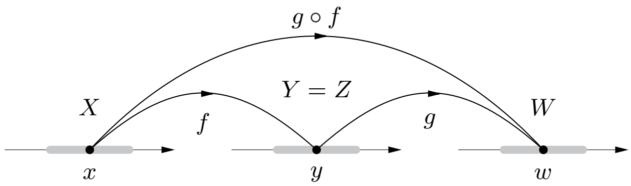
1.3. Złożenia funkcji i funkcje odwrotne

Definicja 1.27. *(funkcja złożona)*

Niech X, Y, Z, W będą zbiorami liczb rzeczywistych, przy czym $Y \subset Z$. *Złożeniem* funkcji $g : Z \longrightarrow W$ oraz $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy funkcję $g \circ f : X \longrightarrow W$ określoną wzorem:

$$(g \circ f)(x) = g\Big(f(x)\Big) \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Uwaga. Analogicznie określa się złożenie większej liczby funkcji. Jeżeli dana jest funkcja złożona $g \circ f$, to za jej dziedzinę naturalną przyjmujemy zbiór $\{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$. Składanie funkcji nie jest przemienne.



Rys. 1.14. Złożenie funkcji

Ćwiczenie 1.28. Określić funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz ich dziedziny, jeżeli:

(a) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$; (b) $f(x) = 2x,\ g(x) = 3x + 1$;

(c) $f(x) = x^3,\ g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; (d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2},\ g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Ćwiczenie 1.29. Znaleźć funkcje f i g takie, że $h = g \circ f$, jeżeli:

(a) $h(x) = \dfrac{2-|x|}{2+|x|}$; (b) $h(x) = \sin^2 x$;

(c) $h(x) = \log\left(x^2+1\right)$; (d) $h(x) = \sqrt{x+2}$.

Czy funkcje f i g są wyznaczone jednoznacznie?

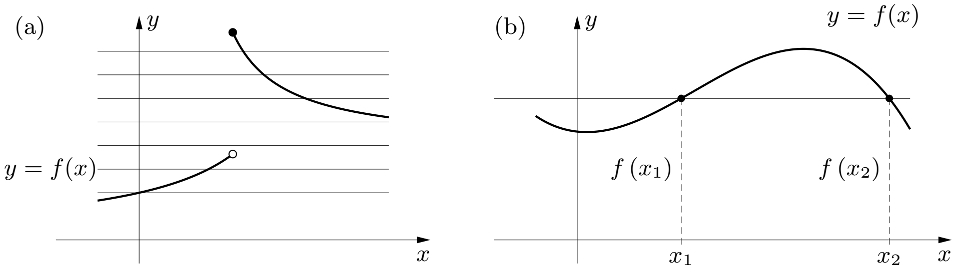
Ćwiczenie 1.30. Pokazać, że złożenie funkcji ściśle monotonicznych tego samego rodzaju jest funkcją rosnącą, a złożenie funkcji ściśle monotonicznych różnych rodzajów jest funkcją malejącą. Korzystając z tego uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

(a) $f(x) = \log\left(x^4+2\right)$, $[0, \infty)$; (b) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $\left(\dfrac{2}{\pi}, \infty\right)$; (c) $f(x) = \dfrac{3^x}{3^x+1}$, $\mathbb{R}$.

Definicja 1.31. *(funkcja różnowartościowa)*

Mówimy, że funkcja f jest *różnowartościowa* na zbiorze $D \subset D_f$, jeżeli dla dowolnych x_1, x_2 z tego zbioru z warunku $x_1 \neq x_2$ wynika $f(x_1) \neq f(x_2)$. Obrazowo: funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze D, gdy każda prosta pozioma przecina wykres funkcji w co najwyżej jednym punkcie.

Uwaga. Przy sprawdzaniu różnowartościowości funkcji wygodnie jest korzystać z równoważnej definicji: funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze $D \subset D_f$, jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in D$ z warunku $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$.



Rys. 1.15. Wykres funkcji (a) różnowartościowej, (b) nieróżnowartościowej

Ćwiczenie 1.32. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

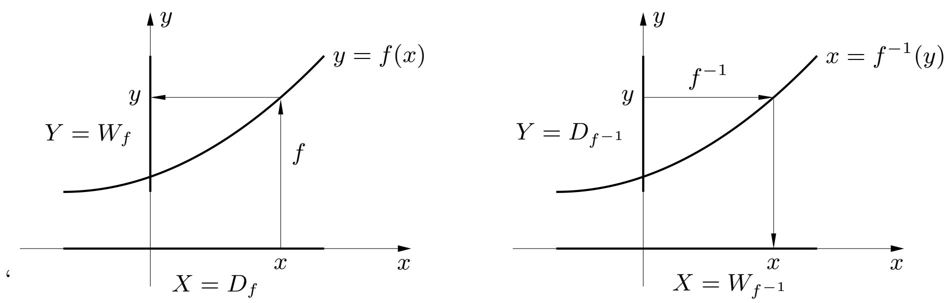
(a) $f(x) = x^3 + 1,\ \mathbb{R}$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ (-\infty, 0)$;

(c) $f(x) = \sqrt{x} + 1,\ [0, \infty)$; (d) $f(x) = x^2 - 2x + 3,\ [1, \infty)$.

Definicja 1.33. *(funkcja odwrotna)*

Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. Funkcją *odwrotną* do f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ określoną przez warunek:

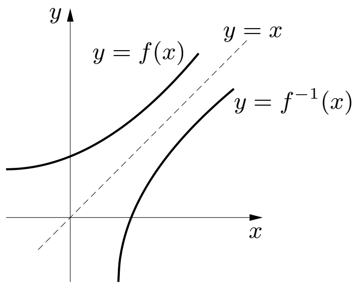
$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x), \ \text{ gdzie } \ x \in X,\ y \in Y.$$



Rys. 1.16. Ilustracja definicji funkcji odwrotnej

Uwaga. Wykres funkcji odwrotnej $x = f^{-1}(y)$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = f(x)$ odbijając go symetrycznie względem prostej $y = x$. Aby uzyskać wzór określający funkcję odwrotną do funkcji f rozwiązujemy (jeżeli jest to możliwe) równanie $y = f(x)$ względem x. Wówczas mamy $x = f^{-1}(y)$. W tym wzorze zamieniamy zmienne y i x. Otrzymujemy w ten sposób wzór na funkcję odwrotną $y = f^{-1}(x)$. Funkcja i odwrotna do niej spełniają tożsamości

$$f^{-1}\Big(f(x)\Big) \equiv x \quad \text{na } X \qquad \text{oraz} \qquad f\Big(f^{-1}(y)\Big) \equiv y \quad \text{na } Y.$$



Rys. 1.17. Wykres funkcji f i f^{-1}

Ćwiczenie 1.34. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

(a) $f(x) = x^7 + 5,\ x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = x^2 - 2x,\ x \in [1, \infty)$;

(c) $f(x) = 2 - \sqrt[5]{x+1},\ x \in \mathbb{R}$;

(d) $f(x) = x^3 \left|x\right|,\ x \in \mathbb{R}$;

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in (-\infty, 0]$;

(f) $f(x) = x - \dfrac{1}{x},\ x \in (0, \infty)$;

(g) $f(x) = 3^x - 3^{-x},\ x \in \mathbb{R}$;

(h) $f(x) = 4^x + 2^{x+1},\ x \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie* 1.35. Uzasadnić, że funkcja odwrotna do funkcji:
(a) rosnącej jest rosnąca; (b) malejącej jest malejąca.

Ćwiczenie 1.36. Narysować wykresy funkcji:
(a) $y = \log 10^x, \quad y = 10^{\log x}$; (b) $y = \sqrt{x^2}, \quad y = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

Definicja 1.37. *(funkcje cyklometryczne)*

• Funkcję odwrotną do funkcji sin (sinus) określonej na przedziale $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ nazywamy arc sin (*arcus sinus*). Mamy zatem

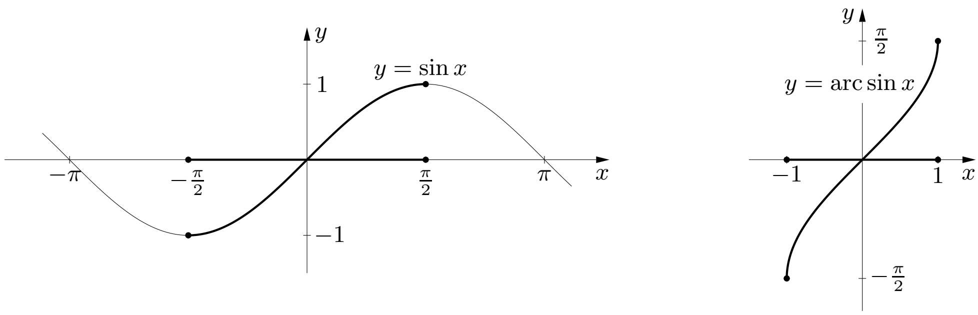
$$\arcsin x = y \iff \sin y = x \text{ dla } -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Dziedziną funkcji arc sin jest przedział $[-1, 1]$, a zbiorem wartości – przedział $[-\pi/2, \pi/2]$.

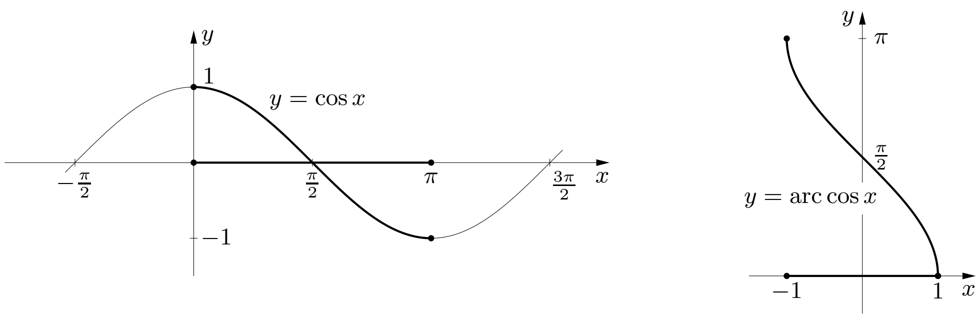
• Funkcję odwrotną do funkcji cos (cosinus) określonej na przedziale $[0, \pi]$ nazywamy arc cos (*arcus cosinus*). Mamy zatem

$$\arccos x = y \iff \cos y = x \text{ dla } -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

Dziedziną funkcji arc cos jest przedział $[-1, 1]$, a zbiorem wartości – przedział $[0, \pi]$.



Rys. 1.18. Wykresy funkcji sinus i arcus sinus

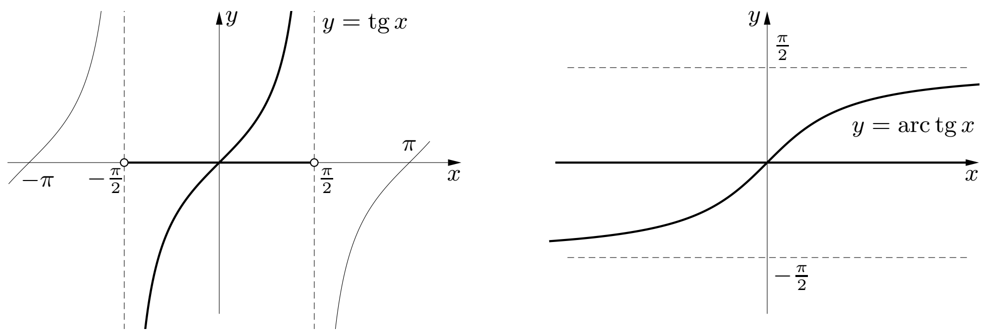


Rys. 1.19. Wykresy funkcji cosinus i arcus cosinus

• Funkcję odwrotną do funkcji tg (tangens) określonej na przedziale $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ nazywamy arc tg (*arcus tangens*). Mamy zatem

$$\operatorname{arc\,tg} x = y \iff \operatorname{tg} y = x \ \text{ dla } x \in \mathbb{R},\ \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Dziedziną funkcji arc tg jest $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości – przedział $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

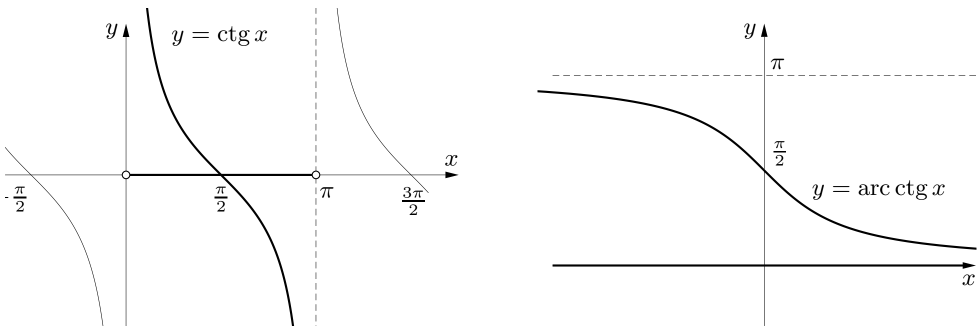


Rys. 1.20. Wykresy funkcji tangens i arcus tangens

• Funkcję odwrotną do funkcji ctg (cotangens) określonej na przedziale $(0, \pi)$ nazywamy arc ctg (*arcus cotangens*). Mamy zatem

$$\operatorname{arc\,ctg} x = y \iff \operatorname{ctg} y = x \ \text{ dla } x \in \mathbb{R}, \ \ 0 < y < \pi.$$

Dziedziną funkcji arc ctg jest $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości – przedział $(0, \pi)$.



Rys. 1.21. Wykresy funkcji cotangens i arcus cotangens

Uwaga. Funkcje arc sin, arc cos, arc tg i arc ctg nazywamy *cyklometrycznymi*.

Ćwiczenie 1.38. Obliczyć wartości funkcji cyklometrycznych (w punkcie (b) skorzystać z kalkulatora):

(a) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arc\,tg}(-1)$, $\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}$;

(b) $\arcsin(-0.4)$, $\arccos 0.91$, $\operatorname{arc\,tg} 0.2378$, $\operatorname{arc\,ctg}(-4.029)$;

(c) $\sin\left(2\arcsin\frac{5}{13}\right)$, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{4}{5}\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{7}\right)$, $\cos(\operatorname{arc\,tg} 3)$.

Ćwiczenie 1.39. Wyznaczyć funkcje odwrotne do funkcji:

(a) $f(x) = \sin x$, $\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$;

(b) $f(x) = \sin x - \cos x$, $-\pi/4 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$;

(c) $f(x) = 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x$, $0 \leqslant x < \pi/2$.

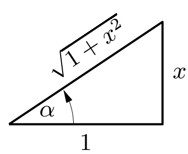
Podstawowe tożsamości z funkcjami cyklometrycznymi

• $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $(x \in [-1, 1])$, • $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

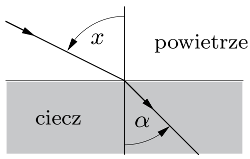
Ćwiczenie 1.40. Uzasadnić równość

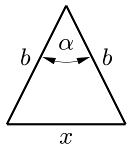
$$\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wsk. Wykorzystać rysunek obok.



Ćwiczenie 1.41. (a) Promień światła pada pod kątem x, gdzie $0 < x < \pi/2$, na ciecz o współczynniku załamania $n = 2$. Znaleźć funkcję opisującą kąt załamania α w zależności od kąta padania x.





(b) W trójkącie równoramiennym ramiona mają długość b. Znaleźć funkcję wyrażającą miarę kąta przy wierzchołku tego trójkąta w zależności od długości podstawy x.

Ćwiczenie* 1.42. Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $y = \cos(\arccos x)$; (b) $y = \arccos(\cos x)$; (c) $y = \sin(\arccos x)$;

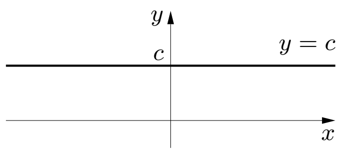
(d) $y = \arccos(\sin x)$; (e) $y = \sin(2 \arcsin x)$; (f) $y = \cos(2 \arccos x)$.

1.4. Funkcje elementarne i inne

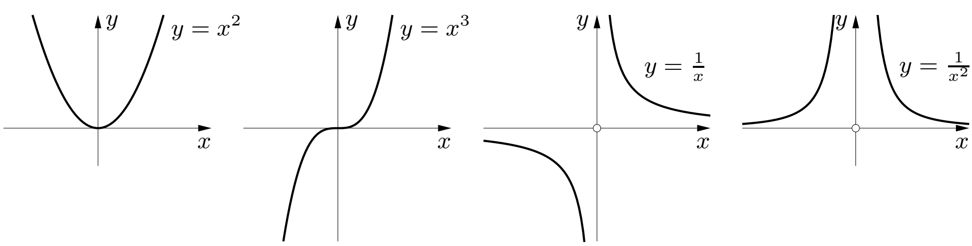
Definicja 1.43. *(podstawowe funkcje elementarne)*

Podstawowymi funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje:

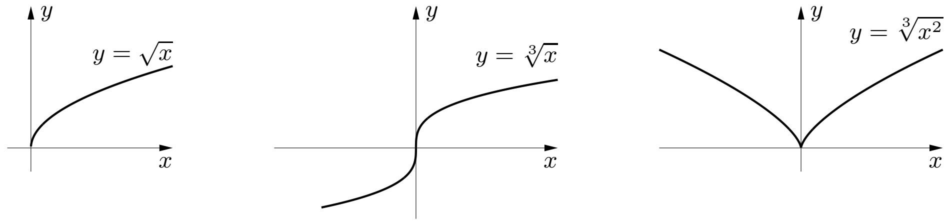
- *stałe* $y = c$ $(c \in \mathbb{R})$,
- *potęgowe* $y = x^\alpha$ $(\alpha \neq 0)$,
- *wykładnicze* $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$,
- *logarytmiczne* $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$,
- *trygonometryczne* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$,
- *cyklometryczne* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.



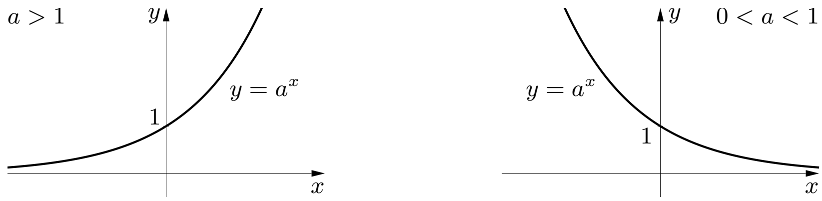
Rys. 1.22. Wykres funkcji stałej



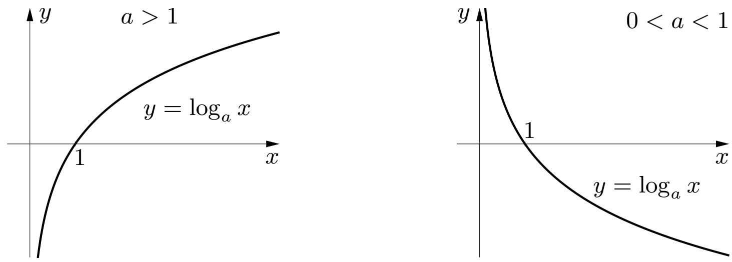
Rys. 1.23. Wykresy funkcji potęgowej $y = x^\alpha$ dla $\alpha = 2,\ 3,\ -1,\ -2$



Rys. 1.24. Wykresy funkcji potęgowej $y = x^\alpha$ dla $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$



Rys. 1.25. Wykresy funkcji wykładniczej



Rys. 1.26. Wykresy funkcji logarytmicznej

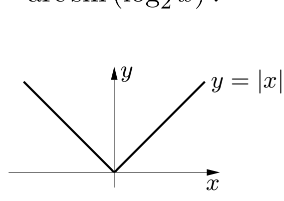
Definicja 1.44. *(funkcje elementarne)*
Funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych oraz operacji składania funkcji, nazywamy *elementarnymi.*

Ćwiczenie 1.45. Uzasadnić, że podane funkcje są elementarne:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$; (b) $f(x) = 3^{\sqrt{1+2\cos x}}$; (c) $f(x) = \log_{\sin x} \operatorname{arc\,tg}\left(x^2+1\right)$;
(d) $f(x) = x^{\sin x}$; (e) $f(x) = \sqrt[5]{2^x - 17}$; (f) $f(x) = \arcsin\left(\log_2 x\right)$.

Definicja 1.46. *(wartość bezwzględna)*
Wartością bezwzględną nazywamy funkcję $|\bullet| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$



Rys. 1.27. Wykres funkcji wartość bezwzględna

Uwaga. Wartość bezwzględna jest funkcją elementarną, gdyż $|x| = \sqrt{x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 1.47. Narysować wykresy funkcji:

(a) $y = |x-1|$; (b) $y = 2 - |x|$; (c) $y = \frac{|x|}{3}$;

(d) $y = x + |x|$; (e) $y = x|x|$; (f) $y = \frac{|x|}{x}$.

Ćwiczenie* 1.48. Funkcje g i h są elementarne odpowiednio na przedziałach $(-\infty, a]$ i $[a, \infty)$, przy czym $g(a) = h(a)$. Pokazać, że funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dla } x \leqslant a, \\ h(x) & \text{dla } x > a \end{cases}$$

też jest elementarna na $\mathbb{R}$. Korzystając z powyższego faktu zapisać jednym wzorem funkcje:

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leqslant 0, \\ \sin x & \text{dla } x > 0; \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$

Definicja 1.49. *(wielomian)*
Wielomianem nazywamy funkcję $W : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

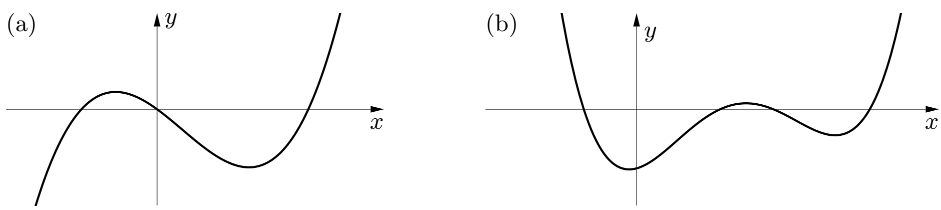
$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $a_i \in \mathbb{R}$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$, przy czym $a_n \neq 0$. Liczbę n nazywamy stopniem wielomianu W i oznaczamy przez $\operatorname{st} W$. Oczywiście każdy wielomian jest funkcją elementarną.

Przykład 1.50. Funkcje

$$W_1(x) \equiv 2; \qquad W_2(x) = x^2 - 3x + 4;$$
$$W_3(x) = x^3 - x^2 - 2x; \qquad W_4(x) = x^4 - 5.3x^3 + 6.8x^2 + 1.5x - 4.3.$$

są wielomianami stopnia odpowiednio 0, 2, 3, 4.



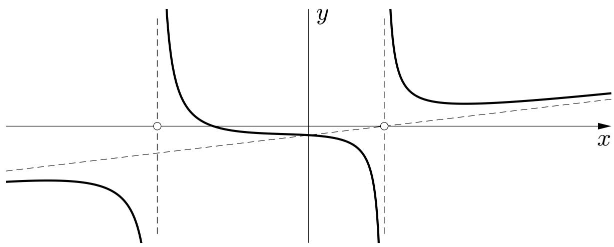
Rys. 1.28. Wykres wielomianu stopnia (a) 3, (b) 4

Definicja 1.51. *(funkcja wymierna)*
Funkcję, którą można zapisać jako iloraz dwóch wielomianów, nazywamy *wymierną*.

Uwaga. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych, z którego wyłączono miejsca zerowe mianownika.

Przykład 1.52. Poniżej podane są przykłady funkcji wymiernych:

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+x-2};\ f(x) = \frac{2x^2+8x+1}{x^2+x+1};\ f(x) = \frac{1.5x+2}{(x+1)^2};\ f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}.$$

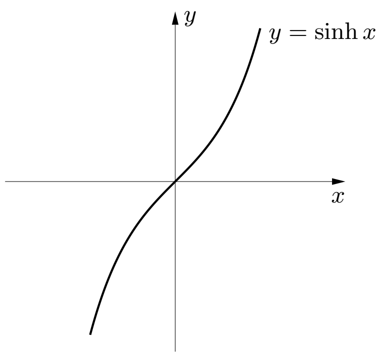


Rys. 1.29. Przykładowy wykres funkcji wymiernej

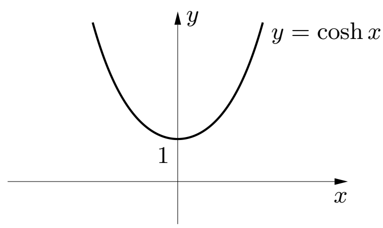
Definicja 1.53. *(funkcje hiperboliczne)*
• Funkcje sinh (*sinus hiperboliczny*) oraz cosh (*cosinus hiperboliczny*) określamy odpowiednio wzorem:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Uwaga. W powyższej definicji e oznacza liczbę rzeczywistą równą w przybliżeniu 2.72. Zobacz określenie tej liczby w Fakcie **??**.



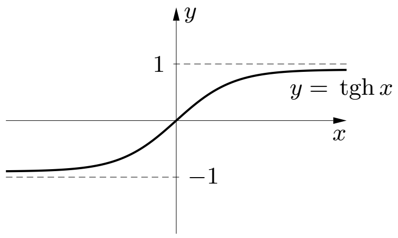
Rys. 1.30. Wykres funkcji $y = \sinh x$



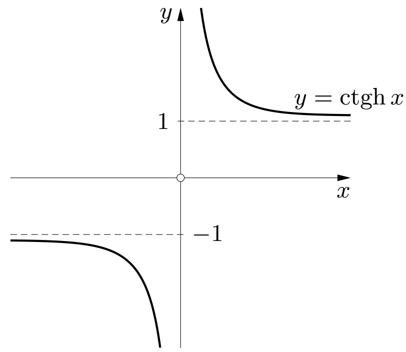
Rys. 1.31. Wykres funkcji $y = \cosh x$

• Funkcje tgh (*tangens hiperboliczny*) oraz ctgh (*cotangens hiperboliczny*) określamy odpowiednio wzorem:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh, x}{\sinh x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\,.$$



Rys. 1.32. Wykres funkcji $y = \operatorname{tgh} x$



Rys. 1.33. Wykres funkcji $y = \operatorname{ctgh} x$

Ćwiczenie 1.54. Pokazać, że na $\mathbb{R}$ zachodzą tożsamości:
(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x \equiv 1$; (b) $\sinh 2x \equiv 2 \sinh x \cosh x$;
(c) $\cosh 2x \equiv \sinh^2 x + \cosh^2 x$.

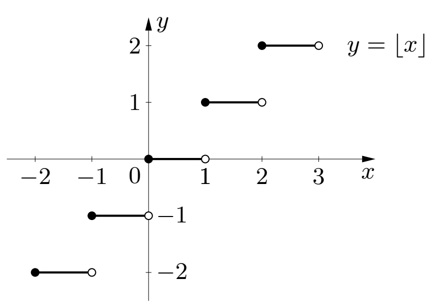
Definicja 1.55. *(funkcje część całkowita i część ułamkowa)*
Funkcją *część całkowita* nazywamy funkcję określoną na $\mathbb{R}$ wzorem:

$$\lfloor x \rfloor = k \ \text{ dla } \ k \leqslant x < k+1, \ \text{ gdzie } \ k \in \mathbb{Z}.$$

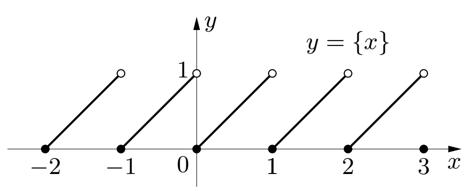
Inaczej: $\lfloor x \rfloor$ jest największą liczbą całkowitą nie większą niż x. Np.: $\lfloor 0.999 \rfloor = 0$, $\lfloor 3.001 \rfloor = 3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -0.1 \rfloor = -1$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.
Funkcję *część ułamkowa* definiujemy wzorem:

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor\,, \ \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

Np.: $\{0.6\} = 0.6$, $\{17.25\} = 0.25$, $\{4\} = 0$, $\{\pi\} = \pi - 3$, $\{-1.8\} = 0.2$.



Rys. 1.34. Wykres funkcji część całkowita



Rys. 1.35. Wykres funkcji część ułamkowa

Uwaga. Z definicji wynika często wykorzystywana nierówność:

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x, \qquad \text{gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

Ćwiczenie 1.56. (a) W Sejmie przyjmowane są ustawy, za którymi głosuje więcej niż połowa obecnych posłów. Na posiedzeniu było p posłów. Korzystając z funkcji część całkowita napisać wzór określający, ile należy oddać głosów „za", aby ustawa została przyjęta.

(b) Cukier jest sprzedawany w jednokilogramowych torebkach oraz w workach zawierających 50 takich torebek. Cena jednego worka wynosi 80 zł, a torebki 2 zł. Znaleźć funkcję podającą, jaką maksymalną liczbę kilogramów cukru może kupić przedsiębiorca dysponujący kwotą x złotych. Narysować wykres tej funkcji. Jak będzie wyglądał wykres tej funkcji, gdy przyjmiemy, że $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$?

(c) Poczta sprzedaje znaczki o nominałach 1 zł, 50 gr, 20 gr, 10 gr. Wysyłając list staramy się nakleić jak najmniej znaczków realizujących potrzebną kwotę. Podać wzór określający liczbę znaczków po 10 gr na liście, na który należy nakleić znaczki o wartości $10n$ gr, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Ćwiczenie* 1.57. (a) Uzasadnić, że funkcja $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ jest okresowa.

(b) Podać wzór na odległość liczby rzeczywistej x od najbliższej liczby całkowitej.

(c) Wyznaczyć wzór na przedostatnią cyfrę liczby naturalnej $n \geqslant 10$.

(d) Znaleźć funkcję odwrotną do $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$.

(e) Pokazać, że dla $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ funkcja $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}(\pi x))$ pokrywa się z funkcją $\lfloor x \rfloor$.

Ćwiczenie 1.58. Narysować wykresy funkcji:

(a) $y = \lfloor \cos x \rfloor$; (b) $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$; (c) $y = \left\lfloor x^2 \right\rfloor$; (d) $y = \lfloor \log_2 x \rfloor$.

Definicja 1.59. *(funkcja signum, funkcja Dirichleta*)*

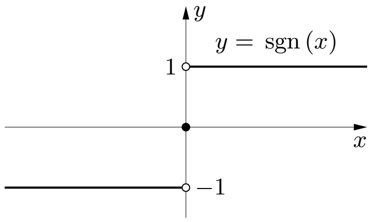
- Funkcją *signum* (znak) nazywamy funkcję $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

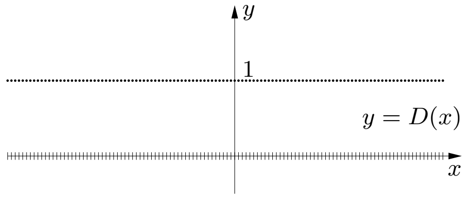
- Funkcją *Dirichleta* nazywamy funkcję $D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

*Peter Gustav Dirichlet (1805–1859), matematyk niemiecki.



Rys. 1.36. Wykres funkcji signum



Rys. 1.37. Wykres funkcji Dirichleta

Ćwiczenie 1.60. Narysować wykresy funkcji:

(a) $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$; (b) $y = \operatorname{sgn}\left(x^2 - 2x\right)$; (c) $y = x \operatorname{sgn}(x)$;

(d) $y = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sgn}(x))$; (e) $y = \min\left\{1, x^2\right\}$; (f) $y = \max\left\{2^x, 2^{-x}\right\}$.

Uwaga. Symbolami $\min A$ i $\max A$ oznaczamy odpowiednio najmniejszy i największy element zbioru A.