

**ALGEBRA
I
GEOMETRIA
ANALITYCZNA**

Teresa Jurlewicz Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA I GEOMETRIA ANALITYCZNA

Przykłady i zadania

Wydanie dwudzieste szóste zmienione



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2025

Teresa Jurlewicz
Przedsiębiorstwo Informatyczne
YUMA
teresa.jurlewicz@yuma.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki

IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1995 – 2025 by Teresa Jurlewicz and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978-83-67234-24-5

Wydanie XXVI zmienione, Wrocław 2025
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp	7
1. Liczby zespolone	9
1.1. Postać algebraiczna liczby zespolonej	9
1.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej	21
1.3. Postać wykładnicza liczby zespolonej	27
1.4. Pierwiastkowanie liczb zespolonych	31
2. Wielomiany	38
2.1. Podstawowe definicje i własności	38
2.2. Pierwiastki wielomianów	40
2.3. Zasadnicze twierdzenie algebry	43
2.4. Ułamki proste	50
3. Macierze i wyznaczniki	56
3.1. Działania na macierzach	56
3.2. Wyznaczniki	61
3.3. Macierz odwrotna	66
4. Układy równań liniowych	76
4.1. Układy Cramera	76
4.2. Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera–Capellego	81
4.3. Metody rozwiązywania układów Cramera	91
4.4. Metody rozwiązywania dowolnych układów równań	98
4.5. Wartości i wektory własne macierzy	105
5. Geometria analityczna w przestrzeni	111
5.1. Wektory i iloczyn skalarny	111
5.2. Iloczyn wektorowy i mieszany	115
5.3. Równania płaszczyzny	123

5.4. Równania prostej	131
5.5. Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn	139
6. Krzywe stożkowe	170
6.1. Okrąg	170
6.2. Elipsa	179
6.3. Hiperbola	186
6.4. Parabola	193
Zbiory zadań	201

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań* jest drugą częścią zestawu podręczników do kursu Algebra z geometrią analityczną. Pierwszą częścią zestawu jest książka pt. „Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory”, a trzecią – opracowanie pt. „Algebra i geometria analityczna. Kolokwia i egzaminy”. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów oraz uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych i wojskowych.

Zbiór „Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania” zawiera przykładowe zadania z rozwiązaniami przedstawionymi „krok po kroku” oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Przykłady i zadania obejmują liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych, geometrię analityczną w przestrzeni oraz krzywe stożkowe. Materiał teoretyczny niezbędny do rozwiązywania zadań można znaleźć w książce pt. „Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory”. Początkowe podpunkty przykładów i zadań są z reguły najprostsze. Z kolei przykłady i zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze. Kierujemy je do ambitnych studentów. Do wszystkich zadań podano odpowiedzi lub wskazówki. Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań z algebry zachęcamy do zapoznania się z książką „Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami”.

W tym wydaniu przeredagowano rozwiązania kilkunastu przykładów. Ponadto usunięto kilka przykładów uciążliwych rachunkowo oraz poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o zbiorze.

Teresa Jurliewicz Zbigniew Skoczylas

*Do 2005 r. książka miała tytuł „Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania”.

1.

Liczby zespolone

1.1. Postać algebraiczna liczby zespolonej

■ **Przykład 1.1.** Wykonać działania:

- (a) $(-2 + 3i) + (7 - 8i)$; (b) $(4i - 3) - (1 + 10i)$; (c) $(\sqrt{2} + i)(3 - \sqrt{3}i)$;
 (d) $(2 + 5i)(2 - 5i)$; (e) $\frac{2 - 3i}{5 + 4i}$; (f) $(3 - 2i)^2$.

Rozwiązanie. Działania dodawania, odejmowania i mnożenia na liczbach zespolonych w postaci algebraicznej $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) wykonujemy tak, jak na wielomianach zmiennej i , pamiętając o warunku $i^2 = -1$. Natomiast w przypadku dzielenia liczb zespolonych stosujemy przekształcenie

$$\frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{u^2 + v^2}.$$

W zbiorze liczb zespolonych prawdziwe są wzory skróconego mnożenia znane dla liczb rzeczywistych. Zatem mamy kolejno:

- (a) $(-2 + 3i) + (7 - 8i) = (-2 + 7) + (3 - 8)i = 5 - 5i$.
 (b) $(4i - 3) - (1 + 10i) = (-3 - 1) + (4 - 10)i = -4 - 6i$.
 (c) $(\sqrt{2} + i)(3 - \sqrt{3}i) = \sqrt{2} \cdot 3 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}i + 3i - \sqrt{3}i^2$
 $= 3\sqrt{2} - \sqrt{6}i + 3i - \sqrt{3} \cdot (-1)$
 $= (3\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{6})i$.
 (d) $(2 + 5i)(2 - 5i) = 2^2 - (5i)^2 = 4 - 25i^2 = 4 - 25 \cdot (-1) = 4 + 25 = 29$.
 (e) $(3 - 2i)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2i + (2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2$
 $= 9 - 12i + 4 \cdot (-1) = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$.
 (f) $\frac{2 - 3i}{5 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(5 - 4i)}{(5 + 4i)(5 - 4i)} = \frac{10 - 8i - 15i + 12i^2}{25 - 16i^2} =$

$$= \frac{10 - 23i + 12 \cdot (-1)}{25 - 16 \cdot (-1)} = \frac{-2 - 23i}{41} = -\frac{2}{41} - \frac{23}{41}i.$$

□ **Zadanie 1.1.** Wykonać działania:

(a) $(1 - 3i) + (4 - 5i)$; (b) $(1 + \sqrt{2}i) - (\sqrt{3} - 6i)$; (c) $(1 - i)(6 + 5i)$;
 (d) $\frac{2 + 3i}{1 + i}$; (e) $(\sqrt{7} - \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3}i)$; (f) $(\sqrt{3} - i)^3$.

Odповідzi. (a) $5 - 8i$; (b) $1 - \sqrt{3} + (6 + \sqrt{2})i$; (c) $11 - i$; (d) $5/2 + i/2$; (e) 10 ;
 (f) $-8i$.

■ **Przykład 1.2.** Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

(a) $x(2 + 3i) + y(4 - 5i) = 6 - 2i$; (b) $(x - i) \cdot (2 - yi) = 11 - 23i$;
 (c) $\frac{x}{2 - 3i} + \frac{y}{3 + 2i} = 1$; (d) $\frac{x + 3 - 2i}{y - 4 + i} = 1 - i$.

Rozwiązanie. Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są równe ich części rzeczywiste i urojone, tzn.

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{cases}$$

(a) Mamy $x(2 + 3i) + y(4 - 5i) = (2x + 4y) + (3x - 5y)i$. Zatem

$$x(2 + 3i) + y(4 - 5i) = 6 - 2i \iff (2x + 4y) + (3x - 5y)i = 6 - 2i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ 3x - 5y = -2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 1, y = 1$.

(b) Mamy $(x - i) \cdot (2 - yi) = (2x - y) + (-2 - xy)i$. Zatem

$$(x - i) \cdot (2 - yi) = 11 - 23i \iff (2x - y) + (-2 - xy)i = 11 - 23i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = 11, \\ -2 - xy = -23. \end{cases}$$

Układ ten jest kolejno równoważny układom równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 11, \\ -2 - x(2x - 11) = -23; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 11, \\ 2x^2 - 11x - 21 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7, \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{2}, \\ y = -14. \end{cases}$$

(c) Mamy

$$\begin{aligned}\frac{x}{2-3i} + \frac{y}{3+2i} &= \frac{x(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} + \frac{y(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{2x+3xi}{13} + \frac{3y-2yi}{13} = \frac{2x+3y}{13} + \frac{3x-2y}{13}i.\end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{x}{2-3i} + \frac{y}{3+2i} = 1 \iff \frac{2x+3y}{13} + \frac{3x-2y}{13}i = 1 \iff (2x+3y) + (3x-2y)i = 13,$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 3x-2y=0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x=2, y=3$.

(d) Mamy $\frac{x+3-2i}{y-4+i} = 1-i$. Stąd $x+3-2i = (1-i)(y-4+i)$, zatem

$$(x+3)-2i = (y-3) + (5-y)i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x+3=y-3, \\ -2=5-y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x=1, y=7$.

□ **Zadanie 1.2.** Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

$$(a) x(2+3i) + y(5-2i) = -8+7i; \quad (b) (2+yi) \cdot (x-3i) = 7-i;$$

$$(c) \frac{1+yi}{x-2i} = 3i-1; \quad (d) \frac{x+yi}{x-yi} = \frac{9-2i}{9+2i}.$$

Odpowiedzi. (a) $x=1, y=-2$; (b) nie istnieją takie liczby; (c) $x=5, y=17$;

(d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y = -2x/9$.

■ **Przykład 1.3.** W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

$$(a) z^2 + 3\bar{z} = 0; \quad (b) 2z + (1+i)\bar{z} = 1-3i;$$

$$(c) z^2 - z + 1 = 0; \quad (d) \frac{z+1}{\bar{z}-1} = -1;$$

$$(e) (z+\bar{z}) + i(z-\bar{z}) = 2i-6; \quad (f) (i-3)z = 5+i-z;$$

$$(g) \frac{1-3i}{3z+2i} = \frac{2i-3}{5-2iz}; \quad (h^*) z^2 - i\bar{z} + 2 = 0.$$

Rozwiązanie. Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z}$ określoną wzorem $\bar{z} = x - iy$.

(a) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} z^2 + 3\bar{z} &= (x + iy)^2 + 3\overline{(x + iy)} \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi + 3x - 3yi = x^2 - y^2 + 3x + (2xy - 3y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $z^2 + 3\bar{z} = 0$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0, \\ 2xy - 3y = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny kolejno układom:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0, \\ y(2x - 3) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0, \\ y = 0 \text{ lub } x = 3/2; \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -3, \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3/2, \\ y = 3\sqrt{3}/2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3/2, \\ y = -3\sqrt{3}/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Zatem równanie $z^2 + 3\bar{z} = 0$ ma cztery rozwiązania:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -3, \quad z_3 = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i), \quad z_4 = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i).$$

(b) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} 2z + (1 + i)\bar{z} &= 2(x + iy) + (1 + i)(x - iy) \\ &= 2x + 2iy + x - iy + ix + y = (3x + y) + (x + y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $2z + (1 + i)\bar{z} = 1 - 3i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x + y = -3. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 2, y = -5$. Zatem $z = 2 - 5i$.

(c) Wykorzystamy wzory na pierwiastki równania kwadratowego $az^2 + bz + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$:

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

W tych wzorach δ jest jedną z liczb zespolonych spełniających warunek $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$. Dla równania kwadratowego $z^2 - z + 1 = 0$ mamy $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$. Zatem $\delta = \sqrt{3}i$ oraz

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

(d) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $\bar{z} \neq 1$ mamy kolejno:

$$\frac{z+1}{\bar{z}-1} = -1; \quad z+1 = -\bar{z}+1; \quad (x+1) + iy = (-x+1) + iy.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x+1 = -x+1, \\ y = y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są pary $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Zatem rozwiązaniem równania $(z+1)/(\bar{z}-1) = -1$ są liczby zespolone postaci $z = iy$, gdzie $y \in \mathbb{R}$. Liczby te spełniają warunek $\bar{z} \neq 1$.

(e) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} (z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) &= [(x + iy) + (x - iy)] + i[(x + iy) - (x - iy)] \\ &= 2x + i \cdot 2iy = 2(x - y). \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 6$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2(x - y) = -6, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Jest to układ sprzeczny, zatem równanie nie ma rozwiązań.

(f) Przekształcamy rozważane równanie do postaci $(i - 3 + 1)z = 5 + i$. Stąd wynika, że

$$z = \frac{5+i}{-2+i} = \frac{(5+i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-9-7i}{5}.$$

(g) Dla $z \neq -2i/3$ oraz $z \neq -5i/2$ rozważane równanie jest równoważne równaniu

$$(1 - 3i)(5 - 2iz) = (3z + 2i)(2i - 3).$$

Stąd wynika, że

$$5 - 2iz - 15i - 6z = 6iz - 9z - 4 - 6i,$$

a więc

$$z(-2i - 6 - 6i + 9) = (-5 + 15i - 4 - 6i).$$

Zatem

$$z = \frac{-9 + 9i}{3 - 8i} = \frac{(-9 + 9i)(3 + 8i)}{(3 - 8i)(3 + 8i)} = \frac{-99 - 45i}{73} = -\frac{99}{73} - \frac{45}{73}i.$$

(h*) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} z^2 - i\bar{z} + 2 &= (x + iy)^2 - i(\overline{x + iy}) + 2 = x^2 + 2ixy - y^2 - ix - y + 2 \\ &= (x^2 - y^2 - y + 2) + i(2xy - x) = 0. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $z^2 - i\bar{z} + 2 = 0$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - y + 2 = 0, \\ 2xy - x = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania wynika, że $x = 0$ lub $y = 1/2$. Po wstawieniu $x = 0$ do pierwszego równania otrzymamy rozwiązania:

$$x = 0, y = 1; \quad x = 0, y = -2.$$

Natomiast po wstawieniu $y = 1/2$ otrzymamy równanie kwadratowe bez rozwiązań rzeczywistych. Zatem równanie wyjściowe ma dwa rozwiązania $z_1 = i$, $z_2 = -2i$.

□ **Zadanie 1.3.** W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

- | | |
|---|--|
| (a) $z^2 = 4\bar{z}$; | (b) $\frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{\bar{z}}$; |
| (c) $z^2 - 4z + 13 = 0$; | (d) $(z+2)^2 = (\bar{z}+2)^2$; |
| (e) $2z + \bar{z} = 6 - 5i$; | (f) $(1+i)z + 3(z-i) = 0$; |
| (g) $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$; | (h) $\overline{z+i} - z + i = 0$; |
| (i*) $z^2 - (6+i)z + 11 - 7i = 0$; | (j*) $z^3 - 6iz^2 - 12z + 8i = 0$. |

Odpowiedzi. (a) $0, 4, -2 + 2i\sqrt{3}, -2 - 2i\sqrt{3}$; (b) brak rozwiązań; (c) $2 - 3i, 2 + 3i$; (d) $\operatorname{Re} z = -2$ lub $\operatorname{Im} z = 0$; (e) $2 - 5i$; (f) $(3 + 12i)/17$; (g) $(7 - i)/6$; (h) $z \in \mathbb{R}$; (i*) $1 - 2i, 5 + 3i$; (j*) $2i$.

■ **Przykład 1.4.** Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

- (a) $\operatorname{Im} [(1 + 2i)z - 3i] < 0$; (b) $\operatorname{Re}(z - i)^2 \geq 0$; (c) $z^2 = 2\operatorname{Re}(iz)$.

Rozwiązanie.

Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie dowolną liczbą zespoloną.

(a) Mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} [(1+2i)z - 3i] < 0 &\iff \operatorname{Im} [(1+2i)(x+iy) - 3i] < 0 \\ &\iff \operatorname{Im} [(x-2y) + (2x+y-3)i] < 0 \\ &\iff 2x+y-3 < 0 \iff y < -2x+3. \end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór jest półpłaszczyzną, bez prostej $y = -2x + 3$ (rys. (a)).

(b) Mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (z-i)^2 \geq 0 &\iff \operatorname{Re} [(x+iy-i)^2] \geq 0 \iff \operatorname{Re} [x+i(y-1)]^2 \geq 0 \\ &\iff \operatorname{Re} [x^2 - (y-1)^2 + 2x(y-1)i] \geq 0 \\ &\iff x^2 - (y-1)^2 \geq 0 \iff x^2 \geq (y-1)^2 \iff |x| \geq |y-1|. \end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór jest sumą dwóch obszarów kątowych ograniczonych prostymi $y = 1 - x$, $y = 1 + x$, łącznie z tymi prostymi (rys. (b)).

(c) Mamy

$$\begin{aligned} z^2 = 2 \operatorname{Re} (iz) &\iff (x+iy)^2 = 2 \operatorname{Re} [i(x+iy)] \\ &\iff x^2 - y^2 + i2xy = 2 \operatorname{Re} [-y + ix] \\ &\iff x^2 - y^2 + i2xy = -2y \end{aligned}$$

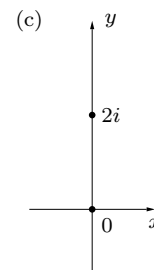
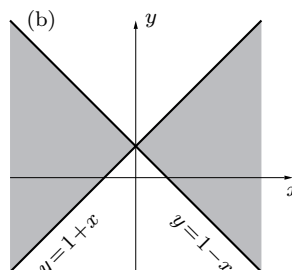
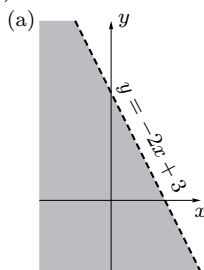
Ostatnia równość jest równoważna układowi równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2y, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest kolejno równoważny układom równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0, \\ x = 0 \text{ lub } y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - 2y = 0, \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x^2 = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 2. \end{cases}$$

Poszukiwany zbiór składa się zatem z dwóch punktów $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$ (rys. (c)).



□ **Zadanie 1.4.** Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

- (a) $\operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0$; (b) $\operatorname{Im} z^2 < 0$; (c) $\overline{z - i} = z - 1$;
 (d) $\frac{4}{z} = \bar{z}$; (e) $\operatorname{Im} \frac{1 + iz}{1 - iz} = 1$; (f) $z\bar{z} + (5 + i)z + (5 - i)\bar{z} + 1 = 0$.

Odpowiedzi. (a) półpłaszczyzna $\operatorname{Im} z \leq 2$; (b) druga i czwarta ćwiartka układu współrzędnych bez obu osi; (c) zbiór pusty; (d) okrąg o środku 0 i promieniu 2; (e) okrąg o środku $1 - i$ i promieniu 1, bez punktu $-i$; (f) okrąg o środku $-5 + i$ i promieniu 5.

■ **Przykład 1.5.** Obliczyć moduły liczb zespolonych:

- (a) $4i$; (b) $12i - 5$; (c) $(4i + 3)(\sqrt{2} - i)$;
 (d) $\frac{2 - i}{\sqrt{3}i - 1}$; (e) $\sqrt{5} + 2i$; (f) $(1 - \sqrt{2}i)^4$.

Rozwiązanie. Moduł liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, jest określony wzorem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wykorzystamy następujące własności modułu liczby zespolonej:

$$(1) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad (2) |z^n| = |z|^n, \quad (3) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (4) |\bar{z}| = |z|.$$

Mamy kolejno

- (a) $|4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$;
 (b) $|12i - 5| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$;
 (c) $|(4i + 3)(\sqrt{2} - i)| \stackrel{(1)}{=} |4i + 3| |\sqrt{2} - i| = \sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{3}$;
 (d) $\left| \frac{2 - i}{\sqrt{3}i - 1} \right| \stackrel{(3)}{=} \frac{|2 - i|}{|\sqrt{3}i - 1|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}{\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
 (e) $|\sqrt{5} + 2i| \stackrel{(4)}{=} |\sqrt{5} + 2i| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$;
 (f) $|(1 - \sqrt{2}i)^4| \stackrel{(2)}{=} |1 - \sqrt{2}i|^4 = \left(\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2} \right)^4 = (\sqrt{3})^4 = 9$.

□ **Zadanie 1.5.** Obliczyć moduły liczb zespolonych:

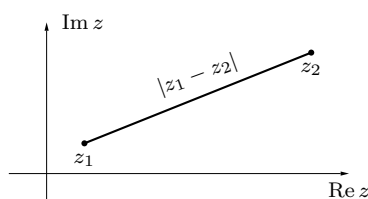
- (a) $-\sqrt{3}i$; (b) $6 - 8i$; (c) $(i - \sqrt{3})(\sqrt{5} + 2i)$;
 (d) $(i - \sqrt{3})^5$; (e) $\frac{1 + 3i}{3 - 4i}$; (f) $1 + i \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Odpowiedzi. (a) $\sqrt{3}$; (b) 10; (c) 6; (d) 32; (e) $\sqrt{10}/5$; (f) $1/\cos \alpha$.

■ **Przykład 1.6.** Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

- (a) $|z + 1 - 2i| = 3$; (b) $2 \leq |z + i| < 4$; (c) $|(1 + i)z - 2| \geq 4$;
 (d) $\left| \frac{z+3}{z-2i} \right| \geq 1$; (e) $\operatorname{Re}(z+1) < 0$ i $|i-z| \leq 3$; (f) $|z^2 + 4| \leq |z - 2i|$;
 (g) $\left| \frac{\bar{z} - 1 - 3i}{3 - 4i} \right| \leq 1$; (h) $|z-1| \leq |z+i| < |z-2+3i|$; (i) $|(z+i)^2| \geq |z^2+1|$.

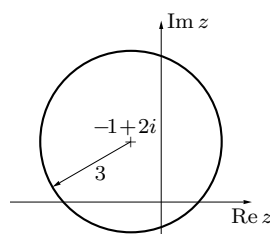
Rozwiązanie. Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1, z_2 płaszczyzny zespolonej (rys.). W rozwiązaniach wykorzystamy własności modułu podane w poprzednim przykładzie.



(a) Mamy

$$|z + 1 - 2i| = 3 \iff |z - (-1 + 2i)| = 3.$$

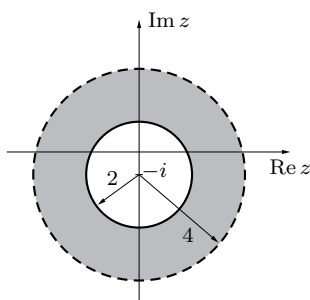
Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości $r = 3$ od punktu $z_0 = -1 + 2i$. Jest to zatem okrąg o środku $z_0 = -1 + 2i$ i promieniu $r = 3$ (rys.).



(b) Mamy

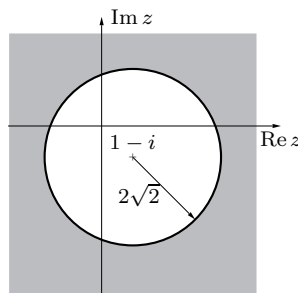
$$2 \leq |z + i| < 4 \iff 2 \leq |z - (-i)| < 4.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości nie mniejszej niż $r_1 = 2$ od punktu $z_0 = -i$ oraz w odległości mniejszej niż $r_2 = 4$ od tego punktu. Jest to zatem pierścień kołowy o środku $z_0 = -i$, promieniu wewnętrznym $r_1 = 2$ i zewnętrznym $r_2 = 4$. Okrąg o promieniu $r_1 = 2$ należy do tego pierścienia, a okrąg o promieniu $r_2 = 4$ nie należy do niego (rys.).



(c) Mamy

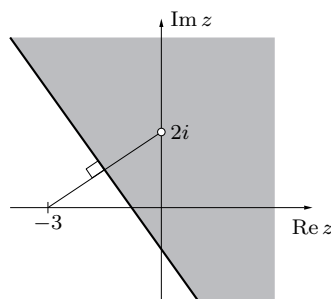
$$\begin{aligned}
 |(1+i)z - 2| \geq 4 &\iff \left| (1+i) \cdot \left(z - \frac{2}{1+i} \right) \right| \geq 4 \\
 &\stackrel{(1)}{\iff} |1+i| \cdot |z - (1-i)| \geq 4 \\
 &\iff \sqrt{2} |z - (1-i)| \geq 4 \\
 &\iff |z - (1-i)| \geq 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$



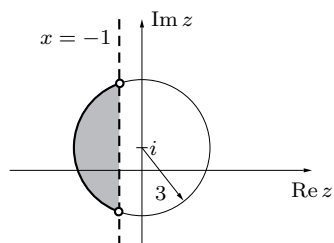
Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości nie mniejszej niż $r = 2\sqrt{2}$ od punktu $z_0 = 1-i$. Jest to zatem zewnątrz koła o środku $z_0 = 1-i$ i promieniu $r = 2\sqrt{2}$. Okrąg o promieniu $r = 2\sqrt{2}$ należy do tego zbioru (rys.).

(d) Dla $z \neq 2i$ mamy

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z+3}{z-2i} \right| \geq 1 &\stackrel{(3)}{\iff} \frac{|z+3|}{|z-2i|} \geq 1 \\
 &\iff |z+3| \geq |z-2i| \\
 &\iff |z - (-3)| \geq |z - 2i|.
 \end{aligned}$$



Szukany zbiór składa się z punktów z , których odległość od punktu $z_1 = -3$ jest nie mniejsza niż odległość od punktu $z_2 = 2i$. Jest to zatem półpłaszczyzna ograniczona symetralną odcinka o końcach z_1, z_2 , bez punktu $z_2 = 2i$. Symetralna ta należy do szukanego zbioru (rys.).



(e) Poszukiwany zbiór jest wspólną częścią zbiorów określonych przez warunki:

$$\operatorname{Re}(z+1) < 0, \quad |i-z| \leq 3.$$

Pierwszy warunek określa lewą półpłaszczyznę otwartą ograniczoną prostą $x = -1$. Drugi warunek określa koło domknięte o środku $z_0 = i$ i promieniu $r = 3$. Wspólną część tych zbiorów przedstawiono na rysunku.

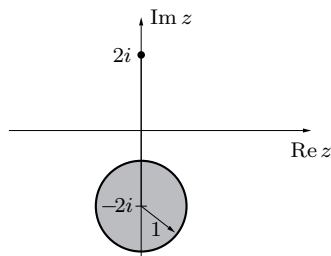
(f) Mamy

$$\begin{aligned}
 |z^2+4| \leq |z-2i| &\iff |(z+2i) \cdot (z-2i)| \leq |z-2i| \\
 &\stackrel{(1)}{\iff} |z+2i| \cdot |z-2i| \leq |z-2i| \\
 &\iff |z-2i| = 0 \text{ albo } |z-2i| > 0 \text{ oraz } |z+2i| \leq 1.
 \end{aligned}$$

Warunek $|z - 2i| = 0$ wyznacza zbiór $\{2i\}$, a warunki

$$|z + 2i| \leq 1 \text{ oraz } |z - 2i| > 0$$

określają koło domknięte o środku $z_0 = -2i$ i promieniu $r = 1$. Sumę tych zbiorów przedstawiono na rysunku.



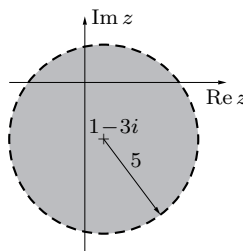
(g) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór $|\bar{z}| = |z|$ oraz własności sprzężenia liczb zespolonych. Mamy

$$\begin{aligned} |\bar{z} - 1 - 3i| &\stackrel{(4)}{=} |\overline{\bar{z} - 1 - 3i}| = |z - 1 + 3i| \\ &= |z - (1 - 3i)| \end{aligned}$$

oraz $|3 - 4i| = 5$. Zatem

$$\left| \frac{\bar{z} - 1 - 3i}{3 - 4i} \right| < 1 \iff |z - (1 - 3i)| < 5.$$

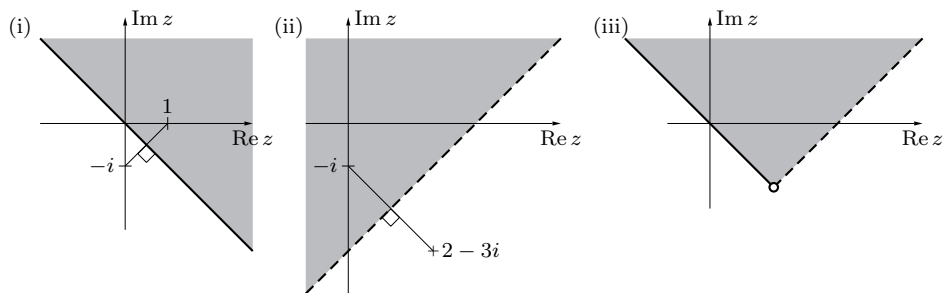
Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości mniejszej niż 5 od punktu $z_0 = 1 - 3i$. Zatem jest to koło o środku z_0 oraz promieniu 5, bez okręgu ograniczającego koło (rys.).



(h) Dana nierówność podwójna jest równoważna koniunkcji

$$|z - 1| \leq |z - (-i)| \text{ oraz } |z - (-i)| < |z - (2 - 3i)|.$$

Rozwiązaniem pierwszej nierówności jest zbiór liczb zespolonych, których odległość od punktu $z_1 = 1$ jest nie większa niż odległość od punktu $z_2 = -i$ (rys. (i)), a rozwiązaniem drugiej – zbiór liczb z , których odległość od punktu $z_2 = -i$ jest mniejsza niż odległość od punktu $z_3 = 2 - 3i$ (rys. (ii)). Zatem pierwszy zbiór jest półpłaszczyzną ograniczoną symetralną odcinka łączącego punkty z_1 i z_2 (symetralna należy do tego zbioru), a drugi półpłaszczyzną ograniczoną symetralną odcinka łączącego punkty z_2 i z_3 (bez tej symetralnej). Szukany zbiór jest wspólną częścią tych półpłaszczyzn (rys. (iii)).



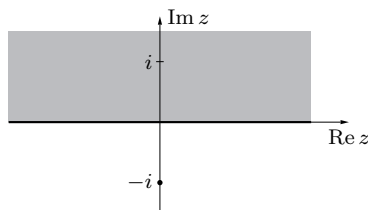
(i) Mamy

$$|(z+i)^2| \geq |z^2+1| \stackrel{(2)}{\iff} |z+i|^2 \geq |(z-i)(z+i)| \stackrel{(1)}{\iff} |z+i|^2 \geq |z-i||z+i|.$$

Gdy $z = -i$, to nierówność jest prawdziwa, a dla $z \neq -i$ jest równoważna nierówności

$$|z+i| \geq |z-i|.$$

Zatem rozwiązaniem wyjściowej nierówności jest półpłaszczyzna ograniczona symetryczną odcinka łączącego punkty $z_1 = -i$, $z_2 = i$ (razem z symetryczną) oraz dołączonym do niej punktem $-i$ (rys.).



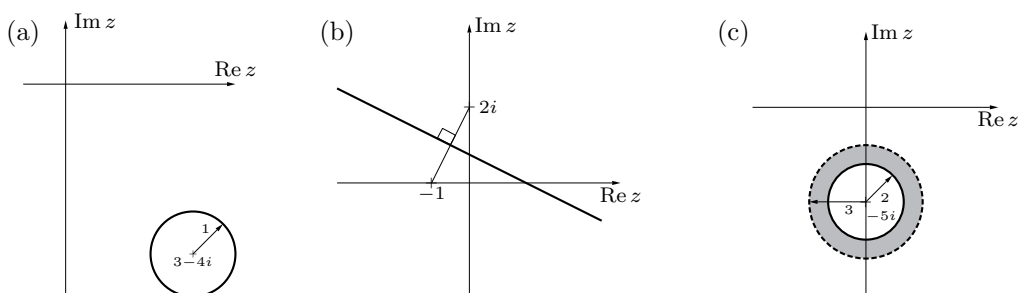
□ **Zadanie 1.6.** Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

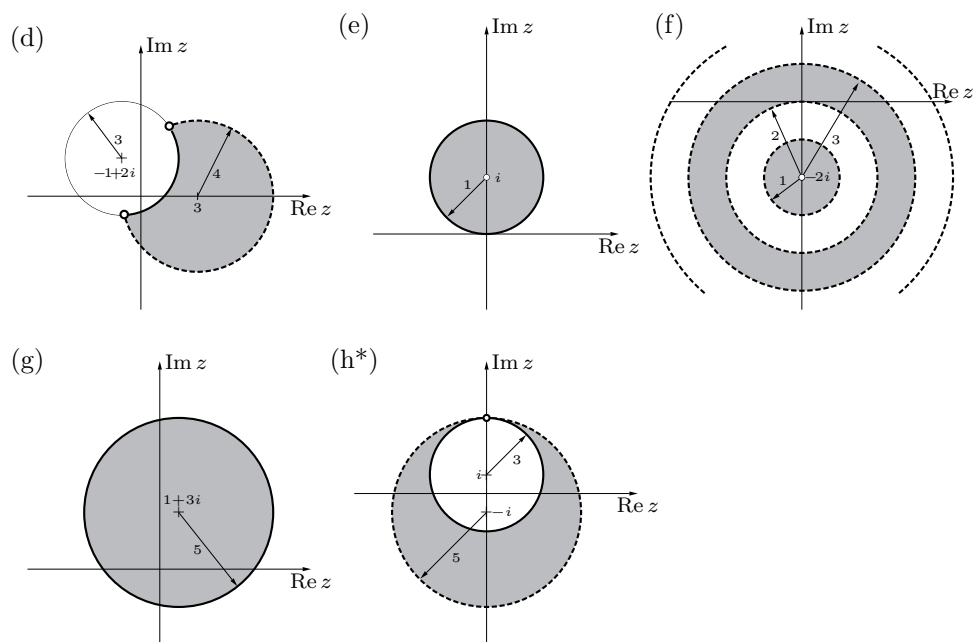
(a) $|z-3+4i|=1$; (b) $\left|\frac{z-2i}{z+1}\right|=1$; (c) $2 \leq |iz-5| < 3$;

(d) $|z+1-2i| \geq 3$ oraz $|z-3| < 4$; (e) $\left|\frac{z+i}{z^2+1}\right| \geq 1$;

(f) $\sin(\pi|z+2i|) > 0$; (g) $|\bar{z}-1+3i| \leq 5$; (h*) $3|z+i| \leq |z^2+1| < 5|z-i|$.

Odpowiedzi. Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej:





1.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

■ **Przykład 1.7.** Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

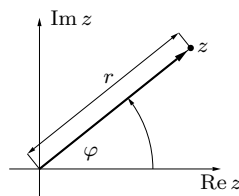
- (a) $-\sqrt{5}$; (b) $-6 + 6i$; (c) $-2i$;
 (d) $\sqrt{3} + i$; (e) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$; (f) $-\sqrt{27} - 3i$.

Rozwiązanie. Liczbę zespoloną $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) można zapisać w postaci trygonometrycznej:

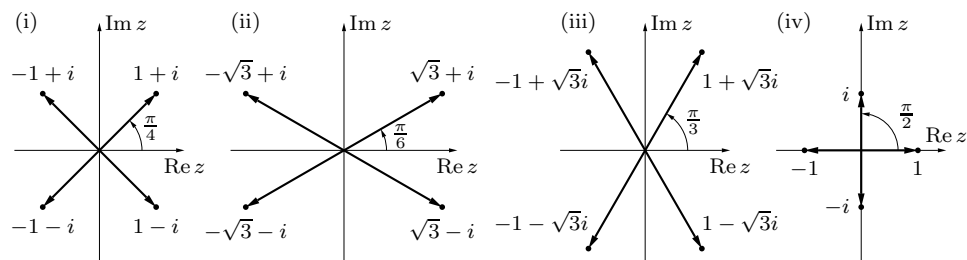
$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest modulem, a φ argumentem liczby z . Dla $r > 0$ argument φ wyznaczamy z warunków:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$



Jednak dość często korzystamy z interpretacji geometrycznej danej liczby zespolonej i jej argument ustalamy na podstawie rysunków i – iv u oraz faktu, że argumenty liczb zespolonych z i αz dla $\alpha > 0$ są takie same.



(a) Dla $z = -\sqrt{5}$ mamy $r = \sqrt{5}$ oraz $\varphi = \pi$ (rys. (iv)). Zatem

$$-\sqrt{5} = \sqrt{5}(\cos \pi + i \sin \pi).$$

(b) Dla $z = -6 + 6i = 6(-1 + i)$ mamy $r = 6\sqrt{2}$ oraz $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ (rys. (i)). Zatem

$$-6 + 6i = 6\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

(c) Dla $z = -2i$ mamy $r = 2$ oraz $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (rys. (iv)). Zatem

$$-2i = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

(d) Dla $z = \sqrt{3} + i$ mamy $r = 2$ oraz $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (rys. (ii)). Zatem

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

(e) Dla $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i = \sqrt{2}(1 - \sqrt{3}i)$ mamy $r = 2\sqrt{2}$ oraz więc $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ (rys. (iii)). Zatem

$$\sqrt{2} - \sqrt{6}i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).$$

(f) Dla $z = -\sqrt{27} - 3i = 3(-\sqrt{3} - i)$ mamy $r = 6$ oraz $\varphi = \frac{7\pi}{6}$ (rys. (ii)). Zatem

$$-\sqrt{27} - 3i = 6 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right).$$

□ **Zadanie 1.7.** Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

(a) $7 + 7i$; (b) $\sqrt{3} - i$; (c) $-5 + 5\sqrt{3}i$; (d) $-\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

Odpowiedzi. (a) $7\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$; (b) $2(\cos(11\pi/6) + i \sin(11\pi/6))$;

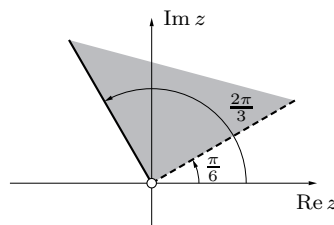
(c) $10(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3))$; (d) $\sqrt{6}(\cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4))$.

■ **Przykład 1.8.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

- (a) $\frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$; (b) $\arg(z + 2 - i) = \pi$; (c) $\pi \leq \arg[(-1 + i)z] \leq \frac{3\pi}{2}$.

Rozwiązanie. Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument φ tej liczby spełniający warunek $0 \leq \varphi < 2\pi$. Ponadto przyjmujemy, że $\arg 0 = 0$.

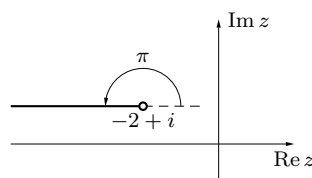
(a) Zbiór składa się z liczb zespolonych, których argumenty główne zawarte są w przedziale $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Jest to obszar kątowy ograniczony półprostymi wychodzącymi z początku układu i tworzącymi kąty $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{2\pi}{3}$ z dodatnią częścią osi $\text{Re } z$. Pierwsza z tych półprostych nie należy do tego zbioru.



(b) Zbiór składa się z liczb zespolonych

$$w = z - (-2 + i),$$

których argumenty główne są równe π . Jest to półprosta wychodząca z początku układu (zmienna w) i tworząca kąt π z dodatnią częścią osi $\text{Re } w$. W układzie współrzędnych ze zmienną z jest to ta sama półprosta (bez początku) przesunięta o wektor $-2 + i$.



(c) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ponieważ $\arg(-1 + i) = 3\pi/4$, więc nierówność

$$\pi \leq \arg[(-1 + i)z] \leq \frac{3\pi}{2}$$

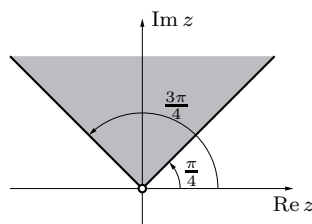
jest równoważna nierówności

$$\pi \leq \frac{3\pi}{4} + \arg z + 2k\pi \leq \frac{3\pi}{2}$$

dla pewnych $k \in \mathbb{Z}$. Ale $0 \leq \arg z < 2\pi$, więc $k = 0$. Stąd otrzymamy

$$\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}.$$

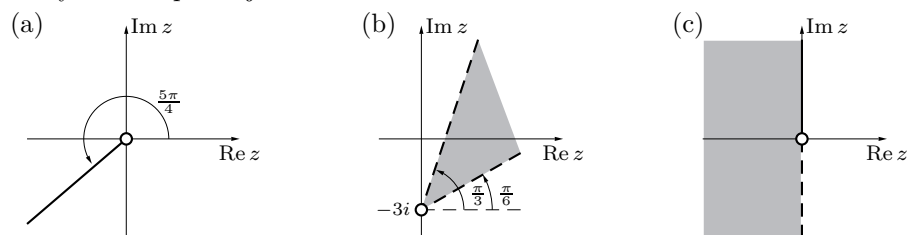
Szukany zbiór jest domkniętym obszarem kątowym ograniczonym półprostymi wychodzącymi z punktu O (bez tego punktu) i tworzącymi kąty $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}$ z dodatnią częścią osi $\text{Re } z$.



□ **Zadanie 1.8.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

- (a) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$; (b) $\frac{\pi}{6} < \arg(z + 3i) < \frac{\pi}{3}$; (c) $\pi \leq \arg(iz) < 2\pi$.

Odpowiedzi. Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej.



■ **Przykład 1.9.** Obliczyć wartości wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

- (a) $(\sqrt{3} - i)^{32}$; (b) $(-2 + 2i)^8$;
 (c) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$; (d) $\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^{14}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór de Moivre'a

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Ponadto wykorzystamy wzory redukcyjne z trygonometrii oraz rysunki z Przykładu ??.

- (a) Dla $z = \sqrt{3} - i$ mamy $|z| = 2$ oraz $\arg z = \frac{11\pi}{6}$ (rys. (ii), str. ??). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^{32} &= \left[2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \right]^{32} = 2^{32} \left(\cos \frac{176\pi}{3} + i \sin \frac{176\pi}{3} \right) \\ &= 2^{32} \left[\cos \left(58\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(58\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{32} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2^{32} \left[\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right] \\
&= 2^{32} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2^{32} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{31} (i\sqrt{3} - 1).
\end{aligned}$$

(b) Dla $z = -2 + 2i$ mamy $|z| = 2\sqrt{2}$ oraz $\arg z = \frac{3\pi}{4}$ (rys. (i), str. ??). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a otrzymamy

$$\begin{aligned}
(-2 + 2i)^8 &= \left[2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^8 \\
&= 2^{12} (\cos 6\pi + i \sin 6\pi) = 2^{12} (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{12}.
\end{aligned}$$

(c) Dla $z_1 = 1 - i$ mamy $|z_1| = \sqrt{2}$ oraz $\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$, a dla $z_2 = \sqrt{3} + i$ mamy $|z_2| = 2$ (rys. (i), str. ??) oraz $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$ (rys. (ii)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right)^6 &= \frac{(1-i)^6}{(\sqrt{3}+i)^6} = \frac{\left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right]^6}{\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^6} \\
&= \frac{2^3 \left(\cos \frac{42\pi}{4} + i \sin \frac{42\pi}{4} \right)}{2^6 (\cos \pi + i \sin \pi)} = \frac{\cos \left(10\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(10\pi + \frac{\pi}{2} \right)}{-2^3} \\
&= \frac{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}}{-2^3} = -\frac{i}{8}.
\end{aligned}$$

(d) Dla $z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ mamy $|z| = 1$. Ponadto $\arg z = \frac{6\pi}{7}$, gdyż ze wzorów redukcyjnych wynika, iż

$$z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) = \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7}.$$

Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)^{14} &= \left[1 \left(\cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7} \right) \right]^{14} \\
&= 1^{14} (\cos 12\pi + i \sin 12\pi) = 1.
\end{aligned}$$

□ **Zadanie 1.9.** Obliczyć wartości wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

$$\begin{aligned} & \text{(a)} (1-i)^{12}; & \text{(b)} (1+\sqrt{3}i)^8; & \text{(c)} (2\sqrt{3}-2i)^{30}; \\ & \text{(d)} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{10}; & \text{(e)} \frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}; & \text{(f)} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}\right)^{24}. \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) -2^6 ; (b) $2^7(-1+\sqrt{3}i)$; (c) -4^{30} ; (d) $-i$; (e) $-32i$; (f) 1.

■ **Przykład 1.10.** Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

(a) $\cos 3x$ przez $\cos x$; (b) $\sin 6x$ przez $\sin x$ i $\cos x$.

Rozwiązanie.

W rozwiązaniach przykładów oprócz wzoru de Moivre'a wykorzystamy wzór dwumianowy Newtona

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

(a) Obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i \sin x)^3$ wykorzystując wymienione powyżej dwa wzory. Z pierwszego wzoru otrzymamy równość

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$\begin{aligned} & (\cos x + i \sin x)^3 = \\ & = (\cos x)^3 + \binom{3}{1}(\cos x)^2(i \sin x) + \binom{3}{2}(\cos x)(i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 \\ & = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \\ & = (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x). \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste prawych stron obu równości otrzymamy

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \\ &= \cos x (\cos^2 x - 3 + 3 \cos^2 x) = \cos x (4 \cos^2 x - 3). \end{aligned}$$

(b) Analogicznie jak powyżej obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i \sin x)^6$. Stosując wzór de Moivre'a otrzymamy równość

$$(\cos x + i \sin x)^6 = \cos 6x + i \sin 6x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$\begin{aligned}
 (\cos x + i \sin x)^6 &= \\
 &= (\cos x)^6 + \binom{6}{1} (\cos x)^5 (i \sin x) + \binom{6}{2} (\cos x)^4 (i \sin x)^2 + \binom{6}{3} (\cos x)^3 (i \sin x)^3 \\
 &\quad + \binom{6}{4} (\cos x)^2 (i \sin x)^4 + \binom{6}{5} (\cos x) (i \sin x)^5 + (i \sin x)^6 \\
 &= \cos^6 x + 6i \cos^5 x \sin x - 15 \cos^4 x \sin^2 x - 20i \cos^3 x \sin^3 x \\
 &\quad + 15 \cos^2 x \sin^4 x + 6i \cos x \sin^5 x - \sin^6 x \\
 &= (\cos^6 x - 15 \cos^4 x \sin^2 x + 15 \cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x) \\
 &\quad + i (6 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x).
 \end{aligned}$$

Porównując części urojone prawych stron obu równości otrzymamy

$$\sin 6x = 6 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x.$$

□ **Zadanie 1.10.** Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

- (a) $\sin 3x$ przez $\sin x$; (b) $\cos 4x$ przez $\sin x$ i $\cos x$.

Odpowiedzi. (a) $\sin x (3 - 4 \sin^2 x)$; (b) $\cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$.

1.3. Postać wykładnicza liczby zespolonej

■ **Przykład 1.11.** Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej z rozwiązać równania:

(a) $z^2 = (\bar{z})^2$; (b) $(\bar{z})^6 = 4|z^2|$; (c) $\frac{|z|^2 z}{(\bar{z})^3} = -1$.

Rozwiązanie.

Zastępując symbolem $e^{i\varphi}$ wyrażenie $\cos \varphi + i \sin \varphi$ występujące w postaci trygonometrycznej liczby zespolonej

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

otrzymamy postać wykładniczą tej liczby, tzn. wzór $z = re^{i\varphi}$. Rozwiązań podanych równań będziemy szukali w postaci wykładniczej. Ponadto przy rozwiązywaniu równań będziemy korzystać z tego, że dwie niezerowe liczby zespolone są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich moduły są równe, a argumenty różnią się o wielokrotność 2π , tzn. dla $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $r_1, r_2 > 0$, mamy

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \text{ oraz } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(a) Łatwo zauważyć, że $z = 0$ spełnia równanie. Niech teraz $z \neq 0$ i $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$ oraz $0 \leq \varphi < 2\pi$. Wtedy $\bar{z} = re^{-i\varphi}$. Ponadto, ze wzoru de Moivre'a, mamy

$$z^2 = r^2 e^{2i\varphi} \quad \text{oraz} \quad (\bar{z})^2 = r^2 e^{-2i\varphi}.$$

Zatem dla $r > 0$, otrzymamy

$$\begin{aligned} z^2 = (\bar{z})^2 &\iff r^2 e^{2i\varphi} = r^2 e^{-2i\varphi} \iff e^{2i\varphi} = e^{-2i\varphi} \\ &\iff 2\varphi = -2\varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \iff \varphi = \frac{k\pi}{2} \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Tak więc, oprócz 0 rozwiązaniami są liczby zespolone postaci $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$ oraz $\varphi = \frac{k\pi}{2}$ dla $k = 0, 1, 2, 3$. Ponieważ

$$\begin{aligned} e^{i \cdot 0} &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, & e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, \\ e^{i \cdot \pi} &= \cos \pi + i \sin \pi = -1, & e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}} &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i, \end{aligned}$$

więc rozwiązaniami równania są liczby zespolone postaci

$$z = r, \quad z = ir, \quad z = -r, \quad z = -ir,$$

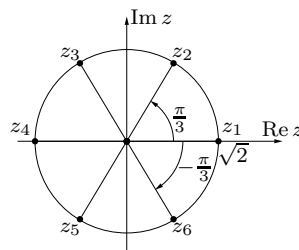
gdzie $r > 0$. W interpretacji geometrycznej rozwiązaniem jest suma osi rzeczywistej i urojonej.

(b) Łatwo zauważyć, że $z = 0$ spełnia równanie. Niech teraz $z \neq 0$ i $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$ oraz $0 \leq \varphi < 2\pi$. Wówczas $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ oraz ze wzoru de Moivre'a, mamy $(\bar{z})^6 = r^6 e^{-6i\varphi}$. Dalej $|z^2| = r^2$, a więc

$$\begin{aligned} (\bar{z})^6 = 4|z^2| &\iff r^6 e^{-6i\varphi} = 4r^2 \iff r^6 e^{-6i\varphi} = 4r^2 e^{i \cdot 0} \\ &\iff r^6 = 4r^2 \quad \text{oraz} \quad -6\varphi = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff r = \sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad \varphi = \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Zatem oprócz $z_0 = 0$ rozwiązaniami są liczby zespolone postaci $z = \sqrt{2}e^{i\varphi}$, gdzie $\varphi = \frac{k\pi}{3}$ dla $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Obliczając $e^{i\varphi}$ dla wyznaczonych wartości φ , otrzymamy rozwiązania:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}, & z_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, & z_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, \\ z_4 &= -z_1, & z_5 &= -z_2, & z_6 &= -z_3. \end{aligned}$$



Są one przedstawione na rysunku.

(c) Ponieważ $z \neq 0$, więc równanie możemy przepisać równoważnie w postaci

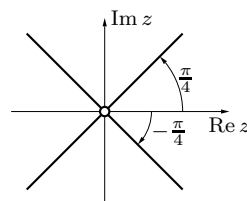
$$|z|^2 \cdot z = (-1) \cdot (\bar{z})^3$$

Niech teraz $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$ oraz $0 \leq \varphi < 2\pi$. Wówczas, jak w poprzednim przykładzie, $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ oraz ze wzoru de Moivre'a $(\bar{z})^3 = r^3 e^{-3i\varphi}$. Dalej $|z|^2 = r^2$, a więc dla $r > 0$, otrzymamy

$$\begin{aligned} |z|^2 \cdot z = (-1) \cdot (\bar{z})^3 &\iff r^2 \cdot (re^{i\varphi}) = e^{i\pi} \cdot (r^3 e^{-3i\varphi}) \\ &\iff r^3 e^{i\varphi} = r^3 e^{i(\pi-3\varphi)} \iff e^{i\varphi} = e^{i(\pi-3\varphi)} \\ &\iff \varphi = \pi - 3\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Tak więc, rozwiązaniami są liczby zespolone postaci

$z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$ oraz $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ dla $k = 0, 1, 2, 3$. Zatem rozwiązania równania tworzą dwie proste nachylone do osi rzeczywistej pod kątami $\frac{\pi}{4}$ oraz $-\frac{\pi}{4}$ i przechodzące przez punkt O , ale bez tego punktu (rys.).



□ **Zadanie 1.11.** Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej z rozwiązać równania:

- (a) $z^7 = \bar{z}$; (b) $\overline{(z^4)} = z^2 |z^2|$; (c) $(\bar{z})^2 |z^2| = \frac{4}{z^2}$;
 (d) $|z|^3 = iz^3$; (e) $z^6 = (\bar{z})^6$; (f) $|z^8| = z^4$.

Odpowiedzi. (a) $0, 1, \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2, i, -\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2, -1, -\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}i/2, -i, \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}i/2$; (b) suma trzech prostych: osi rzeczywistej oraz prostych nachylonych do tej osi pod kątem $\pi/3$ i przechodzących przez punkt O ; (c) okrąg o środku w punkcie O i promieniu $\sqrt[3]{2}$; (d) suma trzech półprostych o początku w punkcie O : nieujemnej części osi urojonej oraz półprostych nachylonych do niej pod kątem $2\pi/3$; (e) suma sześciu prostych przecinających się w punkcie O : obu osi oraz prostych nachylonych do tych osi pod kątem $\pi/6$; (f) $0, 1, i, -1, -i$.

■ **Przykład 1.12.** Stosując wzory Eulera przedstawić:

- (a) $\cos^5 x$; (b) $\sin^6 x$.

w postaci sumy sinusów lub cosinusów wielokrotności kąta x .

Rozwiązanie. W rozwiązaniach wykorzystamy wzór dwumianowy Newtona (zobacz Przykład ??, str. ??) oraz wzory Eulera:

$$(1) \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (2) \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$.

(a) Korzystając ze wzoru (1) oraz stosując wzór dwumianowy Newtona otrzymamy

$$\begin{aligned}\cos^5 x &= \frac{1}{2^5} (e^{ix} + e^{-ix})^5 \\ &= \frac{1}{2^5} \left[(e^{ix})^5 + \binom{5}{1} (e^{ix})^4 e^{-ix} + \binom{5}{2} (e^{ix})^3 (e^{-ix})^2 \right. \\ &\quad \left. + \binom{5}{3} (e^{ix})^2 (e^{-ix})^3 + \binom{5}{4} e^{ix} (e^{-ix})^4 + (e^{-ix})^5 \right] \\ &= \frac{1}{2^5} (e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{2^4} \left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} + 5 \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} + 10 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{16} (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x).\end{aligned}$$

(b) Korzystając ze wzoru (2) oraz stosując wzór dwumianowy Newtona otrzymamy

$$\begin{aligned}\sin^6 x &= \frac{1}{(2i)^6} (e^{ix} - e^{-ix})^6 = \\ &= -\frac{1}{2^6} \left[(e^{ix})^6 - \binom{6}{1} (e^{ix})^5 e^{-ix} + \binom{6}{2} (e^{ix})^4 (e^{-ix})^2 \right. \\ &\quad \left. - \binom{6}{3} (e^{ix})^3 (e^{-ix})^3 + \binom{6}{4} (e^{ix})^2 (e^{-ix})^4 - \binom{6}{5} e^{ix} (e^{-ix})^5 + (e^{-ix})^6 \right] \\ &= -\frac{1}{2^6} (e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{2^5} \left(\frac{e^{i6x} + e^{-i6x}}{2} - 6 \frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} + 15 \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} - 10 \right) \\ &= -\frac{1}{32} (10 - 15 \cos 2x + 6 \cos 4x - \cos 6x).\end{aligned}$$

Uwaga. Otrzymane zależności można wykorzystać do obliczania całek nieoznaczonych funkcji $\cos^5 x$, $\sin^6 x$.

□ **Zadanie 1.12.** Stosując wzory Eulera przedstawić:

(a) $\sin^3 x$; (b) $\cos^2 x$; (c) $\sin^5 x$; (d) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

w postaci sumy sinusów lub cosinusów wielokrotności kąta x .

Odpowiedzi. (a) $(3 \sin x - \sin 3x)/4$; (b) $(1 + \cos 2x)/2$; (c) $(\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)/16$; (d) $(\cos 4x + 3)/4$.

1.4. Pierwiastkowanie liczb zespolonych

■ **Przykład 1.13.** Korzystając z definicji obliczyć:

(a) $\sqrt{4i - 3}$; (b) $\sqrt[3]{8}$.

Rozwiązanie. Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w , która spełnia równość $w^n = z$. Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

(a) Niech $w = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie szukany pierwiastkiem. Wtedy spełnia on równość $w^2 = 4i - 3$, czyli

$$(x + iy)^2 = 4i - 3.$$

Stąd

$$x^2 + 2ixy - y^2 = 4i - 3.$$

Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ 2xy = 4, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są pary liczb:

$$x = 1, y = 2; \quad x = -1, y = -2.$$

Zatem pierwiastkami liczby zespolonej $4i - 3$ są $w_1 = 1 + 2i$ oraz $w_2 = -1 - 2i$. Tak więc $\sqrt{4i - 3} = \{1 + 2i, -1 - 2i\}$.

(b) Niech $w = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie szukany pierwiastkiem. Wtedy $w^3 = 8$, czyli

$$(x + iy)^3 = 8.$$

Stąd

$$x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = 8.$$

Równanie to jest równoważne kolejno układom:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 8, \\ 3x^2y - y^3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x^2 - 3y^2) = 8, \\ y(3x^2 - y^2) = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania układu wynika, że $y = 0$ lub $3x^2 = y^2$. Wykorzystując te zależności w pierwszym równaniu układu otrzymamy $x^3 = 8$ lub $-8x^3 = 8$.

Stąd $x = 2$ lub $x = -1$. Ostatecznie rozwiązaniem układu równań są pary liczb:

$$x = 2, y = 0; \quad x = -1, y = \sqrt{3}; \quad x = -1, y = -\sqrt{3}.$$

Zatem pierwiastkami są: $w_1 = 2$, $w_2 = -1 + i\sqrt{3}$ oraz $w_3 = -1 - i\sqrt{3}$. Tak więc $\sqrt[3]{8} = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$.

□ **Zadanie 1.13.** Korzystając z definicji obliczyć:

(a) $\sqrt{-11 + 60i}$; (b) $\sqrt[3]{i}$; (c) $\sqrt[4]{16}$.

Odpowiedzi. (a) $\{5 + 6i, -5 - 6i\}$; (b) $\{-i, (\sqrt{3} + i)/2, (-\sqrt{3} + i)/2\}$; (c) $\{2, 2i, -2, -2i\}$.

■ **Przykład 1.14.** Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej:

(a) $\sqrt[3]{-27}$; (b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$; (c) $\sqrt[6]{1}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór na pierwiastki stopnia n z liczby zespolonej $z \neq 0$ o argumentzie φ . Wzór ten ma postać:

$$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\},$$

gdzie

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

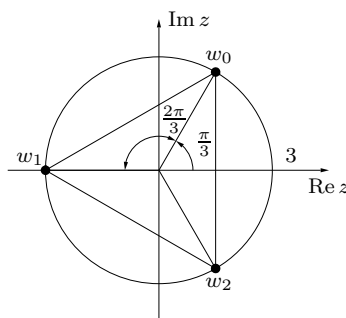
(a) Dla $z = -27$ mamy $|z| = 27$ oraz $\arg z = \pi$. Zatem

$$\sqrt[3]{-27} = \left\{ \sqrt[3]{27} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) : k = 0, 1, 2 \right\}.$$

Dla $k = 0, 1, 2$ otrzymamy odpowiednio:

$$\begin{aligned} w_0 &= 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right), \\ w_1 &= 3 (\cos \pi + i \sin \pi) = 3(-1 + 0 \cdot i) = -3, \\ w_2 &= 3 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right). \end{aligned}$$

$$\text{Stąd } \sqrt[3]{-27} = \left\{ \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -3, \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$



(b) Dla $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ mamy $|z| = 16$ oraz $\arg z = 2\pi/3$. Zatem

$$\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \left\{ \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) : k = 0, 1, 2, 3 \right\}.$$

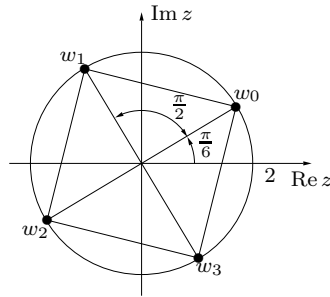
Tak więc dla $k = 0, 1, 2, 3$ mamy odpowiednio:

$$w_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i,$$

$$w_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 + \sqrt{3}i,$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$w_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - \sqrt{3}i.$$



Stąd $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \{ \sqrt{3} + i, -1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} - i, 1 - \sqrt{3}i \}$.

(c) Dla $z = 1$ mamy $|z| = 1$ oraz $\arg z = 0$. Zatem

$$\sqrt[6]{1} = \left\{ \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right) : k = 0, 1, \dots, 5 \right\}.$$

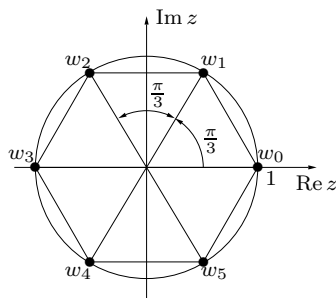
Tak więc dla $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ mamy odpowiednio:

$$w_0 = 1 (\cos 0 + i \sin 0) = 1, \quad w_1 = 1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$w_2 = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad w_3 = 1 (\cos \pi + i \sin \pi) = -1,$$

$$w_4 = 1 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad w_5 = 1 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ostatecznie $\sqrt[6]{1} = \left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$.



□ **Zadanie 1.14.** Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej:

- (a) $\sqrt{-1 + \sqrt{3}i}$; (b) $\sqrt[3]{-27i}$; (c) $\sqrt[4]{-4}$; (d) $\sqrt[6]{-64}$; (e) $\sqrt[5]{32i}$;
 (f) $\sqrt[3]{-1+i}$; (g) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$; (h*) $\sqrt[4]{i}$; (i*) $\sqrt[3]{2+2i}$.

Odpowiedzi. (a) $\left\{ \sqrt{2} \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right), -\sqrt{2} \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \right\}$;
 (b) $\left\{ 3i, -3 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right), 3 \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right) \right\}$; (c) $\{1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i\}$;
 (d) $\left\{ \sqrt{3} + i, 2i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i, -2i, \sqrt{3} - i \right\}$;
 (e) $\{2(\cos(\pi/10) + i \sin(\pi/10)), 2i, 2(\cos(9\pi/10) + i \sin(9\pi/10)), 2(\cos(13\pi/10) + i \sin(13\pi/10)), 2(\cos(17\pi/10) + i \sin(17\pi/10))\}$;
 (f) $\left\{ (1+i)/\sqrt[3]{2}, \left[(-1-\sqrt{3}) + i(-1+\sqrt{3}) \right] / 2\sqrt[3]{2}, \left[(-1+\sqrt{3}) + i(-1-\sqrt{3}) \right] / 2\sqrt[3]{2} \right\}$;
 (g) $\left\{ \sqrt{3} + i, -1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} - i, 1 - \sqrt{3}i \right\}$;
 (h*) $\{ \pm(a + bi), \pm(b - ai) \}$, gdzie $a = 1 + \sqrt{2}b$; $b = 1/\sqrt{4+2\sqrt{2}}$;
 (i*) $\left\{ (a+i)/\sqrt{2a}, [(1-a) + (a-1)i]/\sqrt{2a}, (-1-ai)/\sqrt{2a} \right\}$, gdzie $a = 2 + \sqrt{3}$.

■ **Przykład 1.15.** Odgadując jeden z elementów pierwiastków obliczyć pozostałe:

- (a) $\sqrt{(3-5i)^2}$; (b) $\sqrt[3]{(1+i)^6}$; (c) $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-i)^{12}}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór wyrażający elementy zbioru

$$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$$

w zależności od wybranego pierwiastka w_0 , przy czym argument główny w_0 niekoniecznie musi być najmniejszy:

$$w_k = w_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right), \text{ gdzie } 1 \leq k \leq n-1.$$

(a) Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt{(3-5i)^2}$ jest liczba $z_0 = 3-5i$. Drugi element tego zbioru wyraża się zatem wzorem

$$w_1 = w_0 (\cos \pi + i \sin \pi) = (3-5i) \cdot (-1) = -3+5i.$$

(b) Tu jednym z elementów zbioru $\sqrt[3]{(1+i)^6}$ jest liczba $w_0 = (1+i)^2 = 2i$. Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem

$$w_k = w_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right), \text{ gdzie } k = 1, 2.$$

Zatem

$$w_1 = 2i \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2i \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$w_2 = 2i \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2i \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \sqrt{3} - i.$$

(c) Jednym z elementów zbioru $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-i)^{12}}$ jest liczba

$$\begin{aligned} w_0 &= (\sqrt{3}-i)^3 = \left[2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \right]^3 \\ &= 8 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = -8i. \end{aligned}$$

Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem

$$w_k = w_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} \right), \text{ gdzie } k = 1, 2, 3.$$

Zatem

$$w_1 = -8i \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = -8i \cdot i = 8,$$

$$w_2 = -8i (\cos \pi + i \sin \pi) = -8i \cdot (-1) = 8i,$$

$$w_3 = -8i \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -8i \cdot (-i) = -8.$$

□ **Zadanie 1.15.** Odgadując jeden z elementów pierwiastków obliczyć pozostałe:

(a) $\sqrt{(5-4i)^4}$; (b) $\sqrt[4]{(-2+3i)^4}$; (c) $\sqrt[3]{(2-i)^6}$; (d) $\sqrt[3]{(2-2i)^9}$.

- Odpowiedzi.** (a) $\{9 - 40i, -9 + 40i\}$; (b) $\{-2 + 3i, -3 - 2i, 2 - 3i, 3 + 2i\}$;
 (c) $\left\{3 - 4i, -3/2 + 2\sqrt{3} + 2i + 3\sqrt{3}i/2, -3/2 - 2\sqrt{3} + 2i - 3\sqrt{3}i/2\right\}$;
 (d) $\left\{-16(1 + i), 8\left(1 + \sqrt{3} + i - i\sqrt{3}\right), 8\left(1 - \sqrt{3} + i + i\sqrt{3}\right)\right\}$;

■ **Przykład 1.16.** Znaleźć rozwiązania równań:

- (a) $z^6 = (1 - \sqrt{3}i)^6$; (b) $(z - i)^4 = (z + i)^4$.

Rozwiązanie.

(a) Zauważmy, że rozwiązanie równania $z^6 = (1 - \sqrt{3}i)^6$ sprowadza się do znalezienia zbioru pierwiastków 6-tego stopnia z liczby $(1 - \sqrt{3}i)^6$. Jednym z elementów tego zbioru jest oczywiście liczba $w_0 = 1 - \sqrt{3}i$. Pozostałe elementy tego zbioru wyznaczmy korzystając ze wzoru podanego w poprzednim przykładzie. Mamy

$$w_k = w_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6} \right) = (1 - \sqrt{3}i) \left(\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3} \right) \quad (1 \leq k \leq 5).$$

Zatem

$$w_1 = (1 - \sqrt{3}i) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = (1 - \sqrt{3}i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2,$$

$$w_2 = (1 - \sqrt{3}i) \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (1 - \sqrt{3}i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$w_3 = (1 - \sqrt{3}i) (\cos \pi + i \sin \pi) = (1 - \sqrt{3}i) (-1) = -1 + \sqrt{3}i,$$

$$w_4 = (1 - \sqrt{3}i) \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = (1 - \sqrt{3}i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -2,$$

$$w_5 = (1 - \sqrt{3}i) \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = (1 - \sqrt{3}i) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 - \sqrt{3}i.$$

(b) Oczywiście $z \neq -i$. Zatem równanie ma równoważną postać

$$\left(\frac{z - i}{z + i} \right)^4 = 1,$$

która jest z kolei równoważna alternatywie równań

$$\frac{z - i}{z + i} = \omega_k \quad (0 \leq k \leq 3),$$

gdzie ω_k są elementami zbioru $\sqrt[4]{1}$. Ponieważ

$$\sqrt[4]{1} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{1, -1, i, -i\},$$

zatem równania te przyjmują postać

$$z-i = z+i \quad \text{lub} \quad z-i = -(z+i) \quad \text{lub} \quad z-i = i(z+i) \quad \text{lub} \quad z-i = -i(z+i).$$

Pierwsze z tych równań jest sprzeczne, a pozostałe mają odpowiednio rozwiązania $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$.

□ **Zadanie 1.16.** Znaleźć rozwiązania równań:

$$(a) \ z^4 = (1-i)^4; \quad (b) \ (z-1)^6 = (i-z)^6;$$

$$(c) \ z^3 = (iz+1)^3; \quad (d^*) \ (z+2i)^8 + (z-2i)^8 = 0.$$

Odpowiedzi. (a) $1-i, 1+i, -1-i, -1+i$; (b) $(1+i)/2, (2-\sqrt{3}+i)/(3+i\sqrt{3}), (2+\sqrt{3}+i)/(3-i\sqrt{3}), (2-\sqrt{3}-i)/(1+i\sqrt{3}), (2+\sqrt{3}-i)/(1-i\sqrt{3})$; (c) $1/(1-i), -2/(1+i(2-\sqrt{3})), -2/(1+i(2+\sqrt{3}))$;

$$(d^*) \ z_1 = 2\sqrt{2} \left(\sqrt{7-4\sqrt{2}} + i\sqrt{4\sqrt{2}-5} \right), \ z_2 = \bar{z}_1, \ z_3 = -z_1, \ z_4 = -\bar{z}_1,$$

$$z_5 = 2\sqrt{2} \left(\sqrt{7+4\sqrt{2}} + i\sqrt{4\sqrt{2}+5} \right), \ z_6 = \bar{z}_5, \ z_7 = -z_5, \ z_8 = -\bar{z}_5.$$