ALGEBRA
I
GEOMETRIA
ANALITYCZNA

Teresa Jurlewicz   Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA
I
GEOMETRIA
ANALITYCZNA

Przykłady i zadania

Wydanie dwudzieste piąte uzupełnione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2024

Teresa Jurlewicz
Przedsiębiorstwo Informatyczne
YUMA
teresa.jurlewicz@yuma.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–67234–08-5

Wydanie XXV uzupełnione, Wrocław 2024
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

1 Wstęp **7**

1 Liczby zespolone **9**
1.1. Postać algebraiczna liczby zespolonej 9
1.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej 20
1.3. Postać wykładnicza liczby zespolonej 27
1.4. Pierwiastkowanie liczb zespolonych 30

2 Wielomiany **37**
2.1. Podstawowe definicje i własności 37
2.2. Pierwiastki wielomianów 39
2.3. Zasadnicze twierdzenie algebry 42
2.4 Ułamki proste 47

3 Macierze i wyznaczniki **54**
3.1. Działania na macierzach 54
3.2. Wyznaczniki 60
3.3. Macierz odwrotna 64

4 Układy równań liniowych **73**
4.1. Układy Cramera 73
4.2. Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera–Capellego 77
4.3. Metody rozwiązywania układów Cramera 87
4.4. Metody rozwiązywania dowolnych układów równań 94
4.5 Wartości i wektory własne macierzy 101

5 Geometria analityczna w przestrzeni **107**
5.1. Wektory i iloczyn skalarny 107
5.2. Iloczyn wektorowy i mieszany 110
5.3. Równania płaszczyzny 117
5.4. Równania prostej 123
5.5. Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn 130

6 Krzywe stożkowe **155**
6.1. Okrąg 155
6.2. Elipsa 162
6.3. Hiperbola 168
6.4. Parabola 174

7 Zbiory zadań **181**

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań* jest drugą częścią zestawu podręczników do kursu Algebra z geometrią analityczną. Pierwszą częścią zestawu jest książka pt. *„Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory”*, a trzecią – opracowanie pt. *„Algebra i geometria analityczna. Kolokwia i egzaminy”*. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów oraz uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych i wojskowych.

Zbiór *„Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania”* zawiera przykładowe zadania z rozwiązaniami przedstawionymi „krok po kroku” oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Przykłady i zadania obejmują liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych, geometrię analityczną w przestrzeni oraz krzywe stożkowe. Materiał teoretyczny niezbędny do rozwiązywania zadań można znaleźć w książce pt. *„Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory”*. Początkowe podpunkty przykładów i zadań są z reguły najprostsze. Z kolei przykłady i zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze. Kierujemy je do ambitnych studentów. Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań z algebry zachęcamy do zapoznania się z książką *„Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami”*.

Do tego wydania dołączono kilka nowych przykładów i zadań w rozdziałach *„Geometria analityczna w przestrzeni”* oraz *„Krzywe stożkowe”*. Ponadto, poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o zbiorze.

Teresa Jurlewicz *Zbigniew Skoczylas*

*Do 2005 r. książka miała tytuł *„Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania”*.

1. Liczby zespolone

1.1. Postać algebraiczna liczby zespolonej

■ **Przykład 1.1.** Wykonać działania:

(a) $(-2+3i)+(7-8i)$; (b) $(4i-3)-(1+10i)$;

(c) $\left(\sqrt{2}+i\right)\cdot\left(3-\sqrt{3}i\right)$; (d) $\dfrac{2-3i}{5+4i}$;

(e) $(3-2i)^2$; (f) $(2+5i)(2-5i)$.

Rozwiązanie. Działania dodawania, odejmowania i mnożenia na liczbach zespolonych w postaci algebraicznej $x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ wykonujemy tak, jak na wielomianach zmiennej i, pamiętając o warunku $i^2=-1$. Natomiast w przypadku dzielenia liczb zespolonych stosujemy przekształcenie

$$\frac{x+iy}{u+iv}=\frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)}=\frac{(x+iy)(u-iv)}{u^2+v^2}.$$

W zbiorze liczb zespolonych prawdziwe są tożsamości znane dla liczb rzeczywistych: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, itd. Zatem mamy kolejno:

(a) $(-2+3i)+(7-8i)=(-2+7)+(3-8)i=5-5i.$

(b) $(4i-3)-(1+10i)=(-3-1)+(4-10)i=-4-6i.$

(c) $\left(\sqrt{2}+i\right)\cdot\left(3-\sqrt{3}i\right)=\sqrt{2}\cdot3-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}i+3i-\sqrt{3}i^2=\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{6}\right)i.$

(d) $\dfrac{2-3i}{5+4i}=\dfrac{(2-3i)(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)}=\dfrac{10-8i-15i+12i^2}{25-16i^2}=\dfrac{-2-23i}{41}=-\dfrac{2}{41}-\dfrac{23}{41}i.$

(e) $(3-2i)^2=3^2-3\cdot2i+(2i)^2=9-6i+4i^2=9-6i-4=5-6i.$

(f) $(2+5i)(2-5i)=2^2-(5i)^2=4-25i^2=4+25=29.$

□ **Zadanie 1.1.** Wykonać działania:

(a) $(1-3i)+(4-5i)$; (b) $\left(1+\sqrt{2}i\right)-\left(\sqrt{3}-6i\right)$; (c) $(1-i)(6+5i)$;

(d) $\dfrac{2+3i}{1+i}$; (e) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}i\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}i\right)$; (f) $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$.

Odpowiedzi. (a) $5-8i$; (b) $1-\sqrt{3}+\left(6+\sqrt{2}\right)i$; (c) $11-i$; (d) $5/2+i/2$; (e) 10; (f) $-8i$.

■ **Przykład 1.2.** Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

(a) $x(2+3i)+y(4-5i)=6-2i$; (b) $(x-i)\cdot(2-yi)=11-23i$;

(c) $\dfrac{x}{2-3i}+\dfrac{y}{3+2i}=1$; (d) $\dfrac{x+3-2i}{y-4+i}=1-i$.

Rozwiązanie. Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są równe ich części rzeczywiste i urojone, tzn.

$$z_1=z_2 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{cases}$$

(a) Mamy $x(2+3i)+y(4-5i)=(2x+4y)+(3x-5y)i$. Zatem

$$x(2+3i)+y(4-5i)=6-2i \iff (2x+4y)+(3x-5y)i=6-2i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x+4y=6, \\ 3x-5y=-2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x=1$, $y=1$.

(b) Mamy $(x-i)\cdot(2-yi)=(2x-y)+(-2-xy)i$. Zatem

$$(x-i)\cdot(2-yi)=11-23i \iff (2x-y)+(-2-xy)i=11-23i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x-y=11, \\ -2-xy=-23. \end{cases}$$

Układ ten jest kolejno równoważny układom równań:

$$\begin{cases} y=2x-11, \\ -2-x(2x-11)=-23 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2x-11, \\ 2x^2-11x-21=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=7, \\ y=3 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x=-3/2, \\ y=-14. \end{cases}$$

(c) Mamy

$$\begin{aligned} \frac{x}{2-3i}+\frac{y}{3+2i} &= \frac{x(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}+\frac{y(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{2x+3xi}{13}+\frac{3y-2yi}{13}=\frac{2x+3y}{13}+\frac{3x-2y}{13}i. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{x}{2-3i}+\frac{y}{3+2i}=1 \iff \frac{2x+3y}{13}+\frac{3x-2y}{13}i=1 \iff (2x+3y)+(3x-2y)i=13,$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 3x-2y=13=0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x=2$, $y=3$.

(d) Mamy $\dfrac{x+3-2i}{y-4+i} = 1-i$. Stąd $x+3-2i = (1-i)(y-4+i)$, zatem

$$(x+3)-2i = (y-3)+(5-y)i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x+3 = y-3, \\ -2 = 5-y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x=1$, $y=7$.

□ **Zadanie 1.2.** Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

(a) $x(2+3i)+y(5-2i) = -8+7i$; (b) $(2+yi)\cdot(x-3i) = 7-i$;

(c) $\dfrac{1+yi}{x-2i} = 3i-1$; (d) $\dfrac{x+yi}{x-yi} = \dfrac{9-2i}{9+2i}$.

Odpowiedzi. (a) $x=1, y=-2$; (b) nie istnieją takie liczby; (c) $x=5, y=17$; (d) $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $y=-2x/9$.

■ **Przykład 1.3.** W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

(a) $z^2+3\overline{z} = 0$; (b) $2z+(1+i)\overline{z} = 1-3i$;

(c) $z^2-z+1 = 0$; (d) $\dfrac{z+1}{\overline{z}-1} = -1$;

(e) $(z+\overline{z})+i\,(z-\overline{z}) = 2i-6$; (f) $(i-3)z = 5+i-z$;

(g) $\dfrac{1-3i}{3z+2i} = \dfrac{2i-3}{5-2iz}$; (h*) $z^2-i\,\overline{z}+2 = 0$.

Rozwiązanie. Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x+iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę zespoloną $\overline{z}$ określoną wzorem $\overline{z} = x-iy$.

(a) Niech $z = x+iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} z^2+3\overline{z} &= (x+iy)^2+3\overline{(x+iy)} \\ &= x^2-y^2+2xyi+3x-3yi = x^2-y^2+3x+(2xy-3y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $z^2+3\overline{z} = 0$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x^2-y^2+3x = 0, \\ 2xy-3y = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny kolejno układom:

$$\begin{cases} x^2-y^2+3x = 0, \\ y(2x-3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2+3x = 0, \\ y = 0 \text{ lub } x = 3/2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = -3, \\ y = 0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = 3/2, \\ y = 3\sqrt{3}/2 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = 3/2, \\ y = -3\sqrt{3}/2. \end{cases}$$

Zatem równanie $z^2+3\overline{z} = 0$ ma cztery rozwiązania:

$$z_1 = 0,\ z_2 = -3,\ z_3 = \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right),\ z_4 = \frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right).$$

(b) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} 2z + (1+i)\overline{z} &= 2(x+iy) + (1+i)(x-iy) \\ &= 2x + 2iy + x - iy + ix + y = (3x+y) + (x+y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $2z + (1+i)\overline{z} = 1 - 3i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x + y = -3. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 2$, $y = -5$. Zatem $z = 2 - 5i$.

(c) Wykorzystamy wzory na pierwiastki równania kwadratowego $az^2 + bz + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$:

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$

W tych wzorach δ jest jedną z liczb zespolonych spełniających warunek $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$. Dla równania kwadratowego $z^2 - z + 1 = 0$ mamy $\Delta = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$. Zatem $\delta = \sqrt{3}i$ oraz

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, \quad z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}.$$

(d) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $\overline{z} \neq 1$ mamy

$$\frac{z+1}{\overline{z}-1} = -1 \Longleftrightarrow z + 1 = -\overline{z} + 1 \Longleftrightarrow (x+1) + iy = (-x+1) + iy.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron tego równania, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x + 1 = -x + 1, \\ y = y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są pary $(0,\, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Zatem rozwiązaniem równania $(z+1)/(\overline{z}-1) = -1$ są liczby zespolone postaci $z = iy$, gdzie $y \in \mathbb{R}$. Liczby te spełniają warunek $\overline{z} \neq 1$.

(e) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} (z+\overline{z}) + i\,(z-\overline{z}) &= [(x+iy) + (x-iy)] + i\,[(x+iy) - (x-iy)] \\ &= 2x + i \cdot 2iy = 2(x-y). \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $(z+\overline{z}) + i\,(z-\overline{z}) = 2i - 6$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2(x-y) = -6, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Jest to układ sprzeczny, zatem równanie nie ma rozwiązań.

(f) Przekształcamy rozważane równanie do postaci $(i - 3 + 1)z = 5 + i$. Stąd wynika, że

$$z = \frac{5+i}{-2+i} = \frac{(5+i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-9-7i}{5}.$$

(g) Dla $z \neq -2i/3$ oraz $z \neq -5i/2$ rozważane równanie jest równoważne równaniu

$$(1-3i)(5-2iz) = (3z+2i)(2i-3).$$

Stąd wynika, że
$$5 - 2iz - 15i - 6z = 6iz - 9z - 4 - 6i,$$
a więc
$$z(-2i - 6 - 6i + 9) = (-5 + 15i - 4 - 6i).$$
Zatem
$$z = \frac{-9+9i}{3-8i} = \frac{(-9+9i)(3+8i)}{(3-8i)(3+8i)} = \frac{-99-45i}{73} = -\frac{99}{73} - \frac{45}{73}i.$$
(h*) Niech $z = x + iy$, gdzie $x,\ y \in \mathbb{R}$. Wtedy
$$\begin{aligned} z^2 - i\overline{z} + 2 &= (x+iy)^2 - i\left(\overline{x+iy}\right) + 2 \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 - ix - y + 2 \\ &= \left(x^2 - y^2 - y + 2\right) + i\,(2xy - x) = 0. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $z^2 - i\,\overline{z} + 2 = 0$, otrzymamy układ równań
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - y + 2 = 0, \\ 2xy - x = 0. \end{cases}$$
Z drugiego równania wynika, że $x = 0$ lub $y = 1/2$. Po wstawieniu $x = 0$ do pierwszego równania otrzymamy rozwiązania:
$$x = 0,\ y = 1; \quad x = 0,\ y = -2.$$
Natomiast po wstawieniu $y = 1/2$ otrzymamy równanie kwadratowe bez rozwiązań rzeczywistych. Zatem równanie wyjściowe ma dwa rozwiązania $z_1 = i$, $z_2 = -2i$.

□ **Zadanie 1.3.** W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

(a) $z^2 = 4\overline{z}$;

(b) $\dfrac{1+i}{z} = \dfrac{2-3i}{\overline{z}}$;

(c) $z^2 - 4z + 13 = 0$;

(d) $(z+2)^2 = (\overline{z}+2)^2$;

(e) $2z + \overline{z} = 6 - 5i$;

(f) $(1+i)z + 3(z-i) = 0$;

(g) $\dfrac{2+i}{z-1+4i} = \dfrac{1-i}{2z+i}$;

(h) $\overline{z+i} - z + i = 0$;

(i*) $z^2 - (6+i)\,z + 11 - 7i = 0$;

(j*) $z^3 - 6iz^2 - 12z + 8i = 0$.

Odpowiedzi. (a) $0, 4, -2+2i\sqrt{3}, -2-2i\sqrt{3}$; (b) brak rozwiązań; (c) $2-3i, 2+3i$; (d) $\operatorname{Re} z = -2$ lub $\operatorname{Im} z = 0$; (e) $2-5i$; (f) $(3+12i)/17$; (g) $(7-i)/6$; (h) $z \in \mathbb{R}$; (i*) $1-2i$, $5+3i$; (j*) $2i$.

■ **Przykład 1.4.** Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

(a) $\operatorname{Im}\,[(1+2i)\,z - 3i] < 0$;

(b) $\operatorname{Re}\,(z-i)^2 \geqslant 0$;

(c) $z^2 = 2\operatorname{Re}\,(iz)$;

(d) $\operatorname{Re}\left(z^3\right) \geqslant \operatorname{Im}\left(z^3\right)$.

Rozwiązanie.

Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie dowolną liczbą zespoloną.

(a) Mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\,[(1+2i)z-3i]<0 &\iff \operatorname{Im}\,[(1+2i)(x+iy)-3i]<0\\ &\iff \operatorname{Im}\,[(x-2y)+(2x+y-3)i]<0\\ &\iff 2x+y-3<0 \iff y<-2x+3.\end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór jest półpłaszczyzną otwartą, bez prostej $y = -2x + 3$ (rys. (a)).

(b) Mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\,(z-i)^2 \geqslant 0 &\iff \operatorname{Re}\,\left[(x+iy-i)^2\right] \geqslant 0 \iff \operatorname{Re}\,[x+i(y-1)]^2 \geqslant 0\\ &\iff \operatorname{Re}\,\left[x^2-(y-1)^2+2x(y-1)i\right] \geqslant 0 \iff x^2-(y-1)^2 \geqslant 0\\ &\iff x^2 \geqslant (y-1)^2 \iff |x| \geqslant |y-1|.\end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór jest sumą dwóch obszarów kątowych ograniczonych prostymi $y = 1 - x$, $y = 1 + x$, łącznie z tymi prostymi (rys. (b)).

(c) Mamy

$$\begin{aligned}z^2 = 2\operatorname{Re}\,(iz) &\iff (x+iy)^2 = 2\operatorname{Re}[i(x+iy)]\\ &\iff x^2-y^2+i2xy = 2\operatorname{Re}\,[-y+ix]\\ &\iff x^2-y^2+i2xy=-2y\end{aligned}$$

Ostatnia równość jest równoważna układowi równań

$$\begin{cases} x^2-y^2=-2y,\\ 2xy=0.\end{cases}$$

Układ ten jest kolejno równoważny układom równań

$$\begin{aligned}\begin{cases} x^2-y^2+2y=0,\\ x=0 \text{ lub } y=0\end{cases} &\iff \begin{cases} y^2-2y=0,\\ x=0\end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x^2=0,\\ y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x=0,\\ y=0\end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=0,\\ y=2.\end{cases}\end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór składa się zatem z dwóch punktów $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$ (rys. (c)).

(d) Mamy

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right).$$

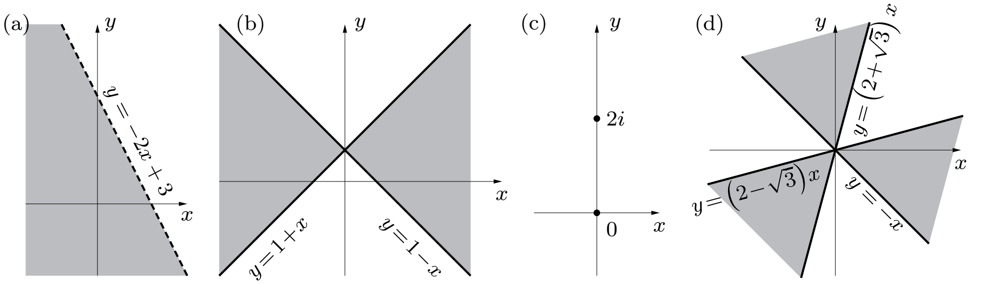
Zatem

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\,\left(z^3\right) \geqslant \operatorname{Im}\,\left(z^3\right) &\iff x^3-3xy^2 \geqslant 3x^2y-y^3\\ &\iff x^3+y^3-3xy^2-3x^2y \geqslant 0\\ &\iff (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)-3xy(x+y) \geqslant 0\\ &\iff (x+y)\left(x^2-4xy+y^2\right) \geqslant 0\\ &\iff (x+y)\left[(y-2x)^2-3x^2\right] \geqslant 0\\ &\iff (y+x)\left[y-\left(2+\sqrt{3}\right)x\right]\left[y-\left(2-\sqrt{3}\right)x\right] \geqslant 0.\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest równoważna alternatywie warunków:

$$\left(y+x \geqslant 0 \text{ oraz } y-\left(2+\sqrt{3}\right)x \geqslant 0 \text{ oraz } y-\left(2-\sqrt{3}\right)x \geqslant 0\right) \quad \text{lub}$$
$$\left(y+x \geqslant 0 \text{ oraz } y-\left(2+\sqrt{3}\right)x \leqslant 0 \text{ oraz } y-\left(2-\sqrt{3}\right)x \leqslant 0\right) \quad \text{lub}$$
$$\left(y+x < 0 \text{ oraz } y-\left(2+\sqrt{3}\right)x \geqslant 0 \text{ oraz } y-\left(2-\sqrt{3}\right)x \leqslant 0\right) \quad \text{lub}$$
$$\left(y+x < 0 \text{ oraz } y-\left(2+\sqrt{3}\right)x \leqslant 0 \text{ oraz } y-\left(2-\sqrt{3}\right)x \geqslant 0\right).$$

Rozwiązanie tej nierówności przedstawiono na rysunku (d).



Uwaga. W Przykładzie 1.11 przedstawimy inny sposób rozwiązania zadań tego typu.

☐ **Zadanie 1.4.** Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

(a) $\operatorname{Re}(iz+2) \geqslant 0$; (b) $\operatorname{Im} z^2 < 0$; (c) $\overline{z-i} = z-1$;

(d) $\dfrac{4}{z} = \overline{z}$; (e) $\operatorname{Im}\dfrac{1+iz}{1-iz} = 1$; (f) $z\overline{z} + (5+i)z + (5-i)\overline{z} + 1 = 0$.

Odpowiedzi. (a) półpłaszczyzna $\operatorname{Im} z \leqslant 2$; (b) druga i czwarta ćwiartka układu współrzędnych bez obu osi; (c) zbiór pusty; (d) okrąg o środku 0 i promieniu 2; (e) okrąg o środku $1-i$ i promieniu 1, bez punktu $-i$; (f) okrąg o środku $-5+i$ i promieniu 5.

■ **Przykład 1.5.** Obliczyć moduły liczb zespolonych:

(a) $4i$; (b) $12i-5$; (c) $(4i+3)\left(\sqrt{2}-i\right)$;

(d) $\dfrac{2-i}{\sqrt{3}i-1}$; (e) $\overline{\sqrt{5}+2i}$; (f) $\left(1-\sqrt{2}i\right)^4$.

Rozwiązanie. Moduł liczby zespolonej $z = x+iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, jest określony wzorem

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Wykorzystamy następujące własności modułu liczby zespolonej:

(1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, (2) $|z^n| = |z|^n$, (3) $|z_1/z_2| = |z_1|\,/\,|z_2|$, (4) $|\overline{z}| = |z|$.

Mamy kolejno

(a) $|4i| = \sqrt{0^2+4^2} = 4$;

(b) $|12i-5| = \sqrt{(-5)^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$;

(c) $\left|(4i+3)\left(\sqrt{2}-i\right)\right| \stackrel{(1)}{=} |4i+3|\left|\sqrt{2}-i\right| = \sqrt{3^2+4^2}\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+(-1)^2} = 5\sqrt{3};$

(d) $\left|\dfrac{2-i}{\sqrt{3}i-1}\right| \stackrel{(3)}{=} \dfrac{|2-i|}{\left|\sqrt{3}i-1\right|} = \dfrac{\sqrt{2^2+(-1)^2}}{\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2};$

(e) $\left|\overline{\sqrt{5}+2i}\right| \stackrel{(4)}{=} \left|\sqrt{5}+2i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2} = 3;$

(f) $\left|\left(1-\sqrt{2}i\right)^4\right| \stackrel{(2)}{=} \left|1-\sqrt{2}i\right|^4 = \left(\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}\right)^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 = 9.$

☐ **Zadanie 1.5.** Obliczyć moduły liczb zespolonych:

(a) $-\sqrt{3}i$; (b) $6-8i$; (c) $\left(i-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+2i\right)$;

(d) $\left(i-\sqrt{3}\right)^5$; (e) $\dfrac{1+3i}{3-4i}$; (f) $1+i\operatorname{tg}\alpha,\ \alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Odpowiedzi. (a) $\sqrt{3}$; (b) 10; (c) 6; (d) 32; (e) $\sqrt{10}/5$; (f) $1/\cos\alpha$.

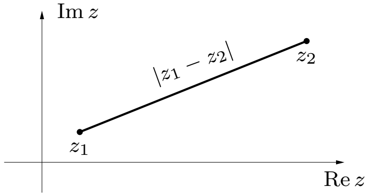
■ **Przykład 1.6.** Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

(a) $|z+1-2i|=3$; (b) $2\leqslant|z+i|<4$; (c) $|(1+i)z-2|\geqslant 4$;

(d) $\left|\dfrac{z+3}{z-2i}\right|\geqslant 1$; (e) $\operatorname{Re}(z+1)<0$ i $|i-z|\leqslant 3$; (f) $\left|z^2+4\right|\leqslant|z-2i|$;

(g) $\left|\dfrac{\overline{z}-1-3i}{3-4i}\right|\leqslant 1$; (h) $|z-1|\leqslant|z+i|<|z-2+3i|$; (i) $\left|(z+i)^2\right|\geqslant\left|z^2+1\right|$.

Rozwiązanie. Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1, z_2 płaszczyzny zespolonej (rys.).

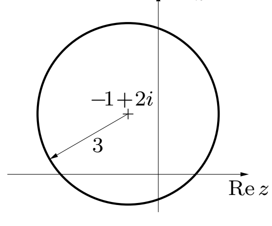


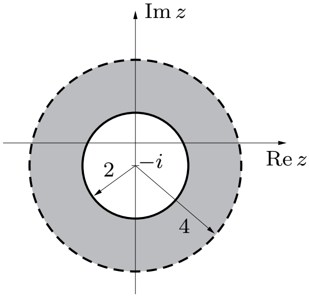
W rozwiązaniach wykorzystamy własności modułu podane w poprzednim przykładzie.

(a) Mamy

$$|z+1-2i|=3 \Longleftrightarrow |z-(-1+2i)|=3.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości $r=3$ od punktu $z_0=-1+2i$. Jest to zatem okrąg o środku $z_0=-1+2i$ i promieniu $r=3$ (rys.).





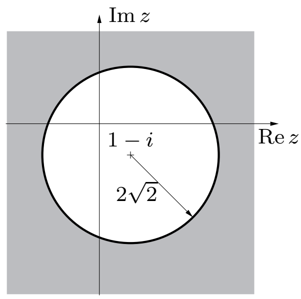
(b) Mamy

$$2 \leqslant |z+i| < 4 \Longleftrightarrow 2 \leqslant |z-(-i)| < 4.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości nie mniejszej niż $r_1 = 2$ od punktu $z_0 = -i$ oraz w odległości mniejszej niż $r_2 = 4$ od tego punktu. Jest to zatem pierścień kołowy o środku $z_0 = -i$, promieniu wewnętrznym $r_1 = 2$ i zewnętrznym $r_2 = 4$. Okrąg o promieniu $r_1 = 2$ należy do tego pierścienia, a okrąg o promieniu $r_2 = 4$ nie należy do niego (rys.).

(c) Mamy

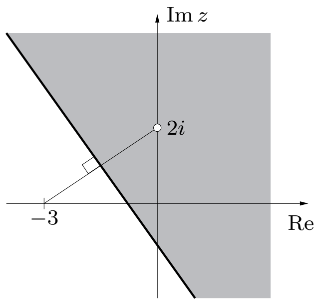
$$\begin{aligned} |(1+i)z-2| \geqslant 4 &\Longleftrightarrow \left|(1+i)\cdot\left(z-\frac{2}{1+i}\right)\right| \geqslant 4 \\ &\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} |1+i|\cdot|z-(1-i)| \geqslant 4 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{2}\,|z-(1-i)| \geqslant 4 \\ &\Longleftrightarrow |z-(1-i)| \geqslant 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$



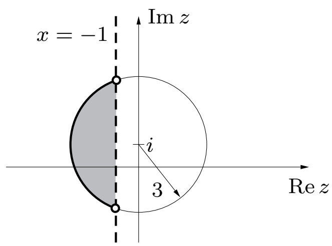
Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości nie mniejszej niż $r = 2\sqrt{2}$ od punktu $z_0 = 1-i$. Jest to zatem zewnętrze koła o środku $z_0 = 1-i$ i promieniu $r = 2\sqrt{2}$. Okrąg o promieniu $r = 2\sqrt{2}$ należy do tego zbioru (rys.).

(d) Dla $z \neq 2i$ mamy

$$\begin{aligned} \left|\frac{z+3}{z-2i}\right| \geqslant 1 &\overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \frac{|z+3|}{|z-2i|} \geqslant 1 \\ &\Longleftrightarrow |z+3| \geqslant |z-2i| \\ &\Longleftrightarrow |z-(-3)| \geqslant |z-2i|. \end{aligned}$$



Szukany zbiór składa się z punktów z, których odległość od punktu $z_1 = -3$ jest nie mniejsza niż odległość od punktu $z_2 = 2i$. Jest to zatem półpłaszczyzna ograniczona symetralną odcinka o końcach z_1, z_2, bez punktu $z_2 = 2i$. Symetralna ta należy do szukanego zbioru (rys.).



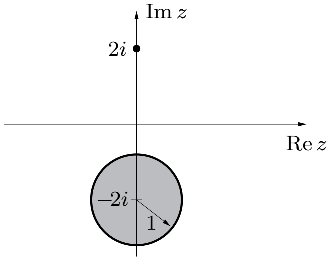
(e) Poszukiwany zbiór jest wspólną częścią zbiorów określonych przez warunki:

$$\operatorname{Re}(z+1) < 0, \qquad |i-z| \leqslant 3.$$

Pierwszy warunek określa lewą półpłaszczyznę otwartą ograniczoną prostą $x = -1$. Drugi warunek określa koło domknięte o środku $z_0 = i$ i promieniu $r = 3$. Wspólną część tych zbiorów przedstawiono na rysunku.

(f) Mamy

$$\left|z^2+4\right| \leqslant |z-2i| \iff |(z+2i)\cdot(z-2i)| \leqslant |z-2i|$$
$$\overset{(1)}{\iff} |z+2i|\cdot|z-2i| \leqslant |z-2i|$$
$$\iff |z-2i| = 0 \text{ albo}$$
$$|z-2i|>0 \text{ oraz } |z+2i| \leqslant 1.$$



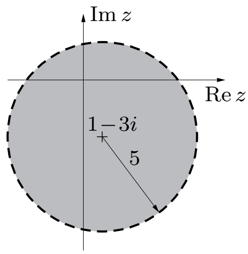
Warunek $|z-2i| = 0$ wyznacza zbiór $\{2i\}$, a warunki

$$|z+2i| \leqslant 1 \quad \text{oraz} \quad |z-2i|>0$$

określają koło domknięte o środku $z_0 = -2i$ i promieniu $r = 1$. Sumę tych zbiorów przedstawiono na rysunku.

(g) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór $|\overline{z}| = |z|$ oraz własności sprzężenia liczb zespolonych. Mamy

$$|\overline{z}-1-3i| \overset{(4)}{=} \left|\overline{\overline{z}-1-3i}\right| = |z-1+3i|$$
$$= |z-(1-3i)|$$



oraz $|3-4i| = 5$. Zatem

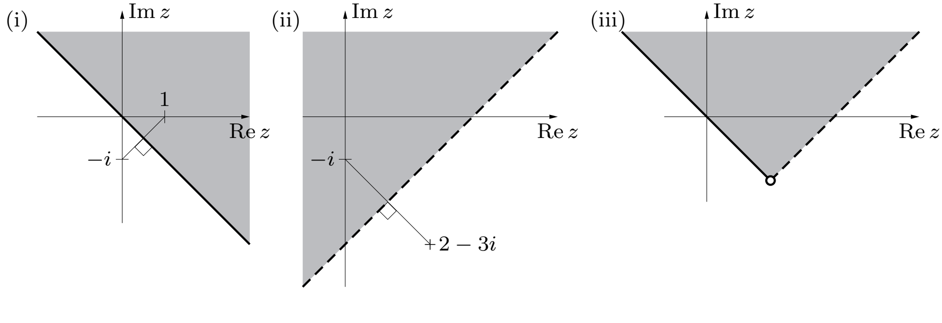
$$\left|\frac{\overline{z}-1-3i}{3-4i}\right| < 1 \iff |z-(1-3i)| < 5.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości mniejszej niż 5 od punktu $z_0 = 1-3i$. Zatem jest to koło o środku z_0 oraz promieniu 5, bez okręgu ograniczającego koło (rys.).

(h) Dana nierówność podwójna jest równoważna koniunkcji

$$|z-1| \leqslant |z-(-i)| \quad \text{oraz} \quad |z-(-i)| < |z-(2-3i)|\,.$$

Rozwiązaniem pierwszej nierówności jest zbiór liczb zespolonych, których odległość od punktu $z_1 = 1$ jest nie większa niż odległość od punktu $z_2 = -i$ (rys. (i)), a rozwiązaniem drugiej – zbiór liczb z, których odległość od punktu $z_2 = -i$ jest mniejsza niż odległość od punktu $z_3 = 2-3i$ (rys. (ii)). Zatem pierwszy zbiór jest półpłaszczyzną ograniczoną symetralną odcinka łączącego punkty z_1 i z_2 (symetralna należy do tego zbioru), a drugi półpłaszczyzną ograniczoną symetralną odcinka łączącego punkty z_2 i z_3 (bez tej symetralnej). Szukany zbiór jest wspólną częścią tych półpłaszczyzn (rys. (iii)).



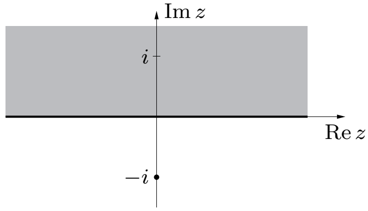
(i) Mamy

$$\left|(z+i)^2\right| \geqslant \left|z^2+1\right| \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} |z+i|^2 \geqslant |(z-i)(z+i)| \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} |z+i|^2 \geqslant |z-i|\,|z+i|.$$

Gdy $z = -i$, to nierówność jest prawdziwa, a dla $z \neq -i$ jest równoważna nierówności

$$|z+i| \geqslant |z-i|.$$

Zatem rozwiązaniem wyjściowej nierówności jest półpłaszczyzna ograniczona symetralną odcinka łączącego punkty $z_1 = -i$, $z_2 = i$ (razem z symetralną) oraz dołączonym do niej punktem $-i$ (rys.).



☐ **Zadanie 1.6.** Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

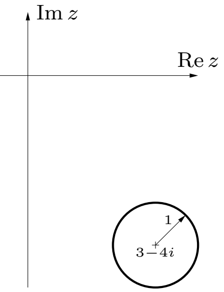
(a) $|z-3+4i| = 1$; (b) $\left|\dfrac{z-2i}{z+1}\right| = 1$; (c) $2 \leqslant |iz-5| < 3$;

(d) $|z+1-2i| \geqslant 3$ oraz $|z-3| < 4$; (e) $\left|\dfrac{z+i}{z^2+1}\right| \geqslant 1$;

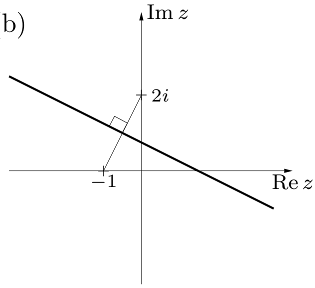
(f) $\sin(\pi|z+2i|) > 0$; (g) $|\overline{z}-1+3i| \leqslant 5$; (h*) $3|z+i| \leqslant \left|z^2+1\right| < 5|z-i|$.

Odpowiedzi. Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej:

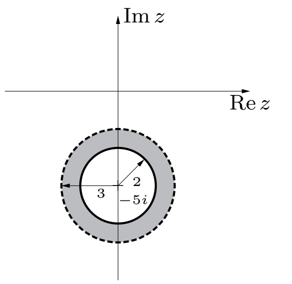
(a)



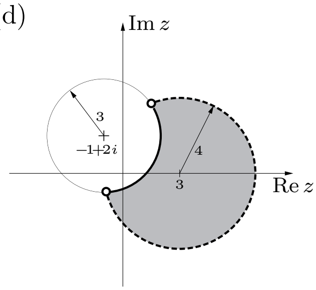
(b)



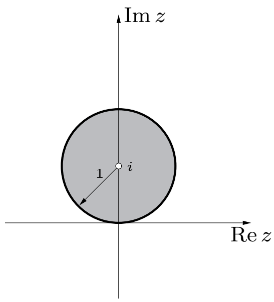
(c)



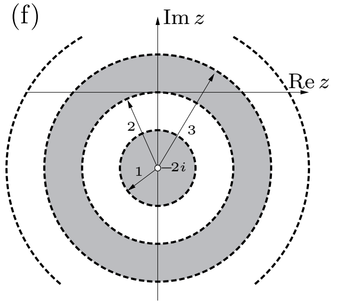
(d)



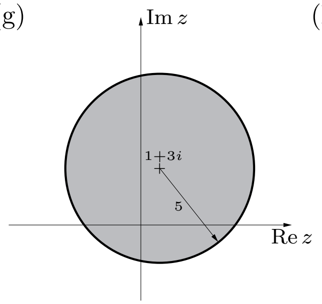
(e)



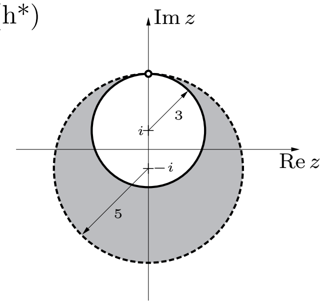
(f)



(g)



(h*)



1.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

■ **Przykład 1.7.** Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

(a) $-\sqrt{5}$; (b) $-6+6i$; (c) $-2i$;

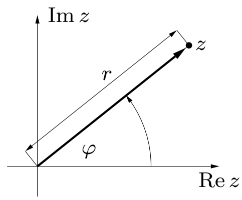
(d) $\sqrt{3}+i$; (e) $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$; (f) $-\sqrt{27}-3i$.

Rozwiązanie. Liczbę zespoloną $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) można zapisać w postaci trygonometrycznej:

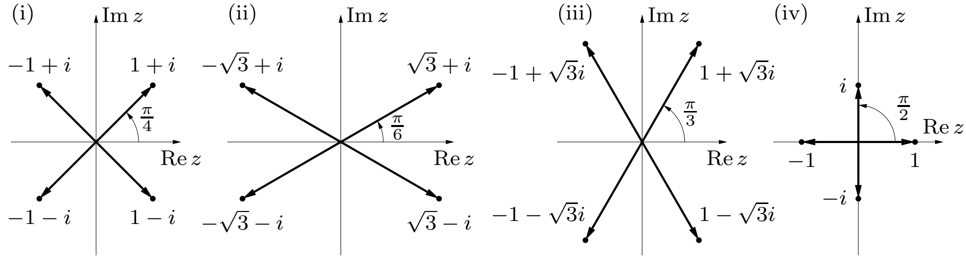
$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),$$

gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2}$ jest modułem, a φ argumentem liczby z. Dla $r > 0$ argument wyznaczamy z warunków:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$



Jednak dość często korzystamy z interpretacji geometrycznej danej liczby zespolonej i jej argument ustalamy na podstawie rysunku oraz faktu, że argumenty liczb zespolonych z i αz dla $\alpha > 0$ są takie same.



(a) Dla $z = -\sqrt{5}$ mamy $r = \sqrt{5}$ oraz $\varphi = \pi$ (rys. (iv)). Zatem

$$-\sqrt{5} = \sqrt{5}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right).$$

(b) Dla $z = -6+6i = 6(-1+i)$ mamy $r = 6\sqrt{2}$ oraz $\varphi = 3\pi/4$ (rys. (i)). Zatem

$$-6+6i = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

(c) Dla $z = -2i$ mamy $r = 2$ oraz $\varphi = 3\pi/2$ (rys. (iv)). Zatem

$$-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

(d) Dla $z = \sqrt{3} + i$ mamy $r = 2$ oraz $\varphi = \pi/6$ (rys. (ii)). Zatem

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

(e) Dla $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i = \sqrt{2}\left(1 - \sqrt{3}i\right)$ mamy $r = 2\sqrt{2}$ oraz więc $\varphi = 5\pi/3$ (rys. (iii)). Zatem

$$\sqrt{2} - \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

(f) Dla $z = -\sqrt{27} - 3i = 3\left(-\sqrt{3} - i\right)$ mamy $r = 6$ oraz $\varphi = 7\pi/6$ (rys. (ii)). Zatem

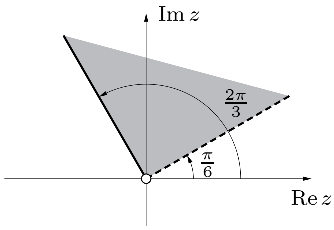
$$-\sqrt{27} - 3i = 6\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

□ **Zadanie 1.7.** Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:
(a) $7 + 7i$; (b) $\sqrt{3} - i$; (c) $-5 + 5\sqrt{3}i$; (d) $-\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

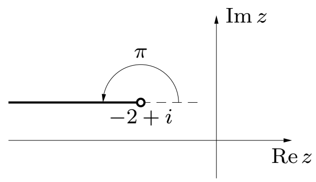
Odpowiedzi. (a) $7\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right)$; (b) $2\left(\cos(11\pi/6) + i\sin(11\pi/6)\right)$; (c) $10\left(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)\right)$; (d) $\sqrt{6}\left(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\right)$.

■ **Przykład 1.8.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:
(a) $\dfrac{\pi}{6} < \arg z \leqslant \dfrac{2\pi}{3}$; (b) $\arg\,(z + 2 - i) = \pi$; (c) $\pi \leqslant \arg\,[(-1 + i)z] \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$.

Rozwiązanie. Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument φ tej liczby spełniający warunek $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Ponadto przyjmujemy, że $\arg 0 = 0$.



(a) Zbiór składa się z liczb zespolonych, których argumenty główne zawarte są w przedziale $(\pi/6, 2\pi/3]$. Jest to obszar kątowy ograniczony półprostymi wychodzącymi z początku układu i tworzącymi kąty $\pi/6$ i $2\pi/3$ z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} z$. Pierwsza z tych półprostych nie należy do tego zbioru.



(b) Zbiór składa się z liczb zespolonych $w = z-(-2+i)$, których argumenty główne są równe π. Jest to półprosta wychodząca z początku układu (zmienna w) i tworząca kąt π z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} w$. W układzie współrzędnych ze zmienną z jest to ta sama półprosta (bez początku) przesunięta o wektor $-2 + i$.

(c) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór

$$\arg\,(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ponieważ $\arg\,(-1 + i) = 3\pi/4$, więc nierówność

$$\pi \leqslant \arg\left[(-1+i)z\right] \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

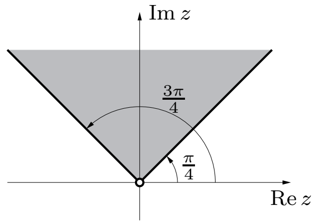
jest równoważna nierówności

$$\pi \leqslant \frac{3\pi}{4} + \arg z + 2k\pi \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

dla pewnych $k \in \mathbb{Z}$. Ale $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, więc $k = 0$. Stąd otrzymamy

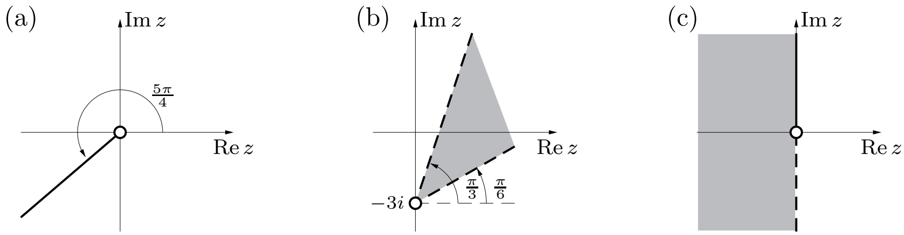
$$\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{4}.$$

Szukany zbiór jest domkniętym obszarem kątowym ograniczonym półprostymi wychodzącymi z punktu O (bez tego punktu) i tworzącymi kąty $\pi/4$ i $3\pi/4$ z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} z$.



☐ **Zadanie 1.8.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:
(a) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$; (b) $\frac{\pi}{6} < \arg(z+3i) < \frac{\pi}{3}$; (c) $\pi \leqslant \arg(iz) < 2\pi$.

Odpowiedzi. Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej.



■ **Przykład 1.9.** Obliczyć wartości wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

(a) $(1+i)^7$; (b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{32}$; (c) $(-2+2i)^8$;

(d) $(\cos 33^0 + i\sin 33^0)^{10}$; (e) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$; (f) $\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{14}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór de Moivre'a

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right),$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Ponadto wykorzystamy wzory redukcyjne oraz rysunki z Przykładu 1.7.

(a) Dla $z = 1 + i$ mamy $|z| = \sqrt{2}$ oraz $\arg z = \pi/4$ (rys. (i)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}
(1+i)^7 &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7 \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \\
&= 8\sqrt{2}\left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8 - 8i.
\end{aligned}$$

(b) Dla $z = \sqrt{3} - i$ mamy $|z| = 2$ oraz $\arg z = 11\pi/6$ (rys. (ii)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{3} - i\right)^{32} &= \left[2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]^{32} = 2^{32}\left(\cos\frac{176\pi}{3} + i\sin\frac{176\pi}{3}\right) \\
&= 2^{32}\left[\cos\left(58\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(58\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2^{32}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= 2^{32}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2^{32}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 2^{32}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{31}\left(i\sqrt{3} - 1\right).
\end{aligned}$$

(c) Dla $z = -2 + 2i$ mamy $|z| = 2\sqrt{2}$ oraz $\arg z = 3\pi/4$ (rys. (i)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a otrzymamy

$$\begin{aligned}
(-2+2i)^8 &= \left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^8 \\
&= 2^{12}(\cos 6\pi + i\sin 6\pi) = 2^{12}(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{12}.
\end{aligned}$$

(d) Dla $z = \cos 33^0 + i\sin 33^0$ mamy $|z| = 1$ oraz $\arg z = 33^0$. Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\cos 33^0 + i\sin 33^0\right)^{10} &= 1^{10}\left(\cos 330^0 + i\sin 330^0\right) \\
&= \cos\left(360^0 - 30^0\right) + i\sin\left(360^0 - 30^0\right) \\
&= \cos 30^0 - i\sin 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.
\end{aligned}$$

(e) Dla $z_1 = 1 - i$ mamy $|z_1| = \sqrt{2}$ oraz $\arg z_1 = -\pi/4$, a dla $z_2 = \sqrt{3} + i$ mamy $|z_2| = 2$ (rys. (i)) oraz $\arg z_2 = \pi/6$ (rys. (ii)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6 &= \frac{(1-i)^6}{\left(\sqrt{3}+i\right)^6} = \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^6}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6} = \frac{2^3\left(\cos\frac{42\pi}{4} + i\sin\frac{42\pi}{4}\right)}{2^6\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)} \\
&= \frac{\cos\left(10\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(10\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{-2^3} = \frac{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}{-2^3} = -\frac{i}{8}.
\end{aligned}$$

(f) Dla $z = -\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7)$ mamy $|z| = 1$. Ponadto $\arg z = 6\pi/7$, gdyż ze wzorów redukcyjnych wynika, iż

$$z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}.$$

Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a otrzymamy

$$\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{14} = \left[1\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)\right]^{14} = 1^{14}\left(\cos 12\pi + i\sin 12\pi\right) = 1.$$

☐ **Zadanie 1.9.** Obliczyć wartości wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

(a) $(1-i)^{12}$; (b) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^8$; (c) $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{30}$;

(d) $\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$; (e) $\dfrac{(1+i)^{22}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^6}$; (f) $\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{24}$.

Odpowiedzi. (a) -2^6; (b) $2^7\left(-1+\sqrt{3}i\right)$; (c) -4^{30}; (d) $-i$; (e) $-32i$; (f) 1.

■ **Przykład 1.10.** Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

(a) $\cos 3x$ przez $\cos x$; (b) $\sin 6x$ przez $\sin x$ i $\cos x$.

Rozwiązanie.

(a) Obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i\sin x)^3$ wykorzystując dwa wzory: wzór de Moivre'a oraz wzór dwumianowy Newtona. Stosując wzór de Moivre'a otrzymamy równość

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^3 &= (\cos x)^3 + \binom{3}{1}(\cos x)^2(i\sin x) + \binom{3}{2}(\cos x)(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3\\ &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x\\ &= \left(\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x\right) + i\left(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right).\end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste prawych stron obu równości otrzymamy

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos x\left(\cos^2 x - 3\sin^2 x\right)\\ &= \cos x\left(\cos^2 x - 3 + 3\cos^2 x\right) = \cos x\left(4\cos^2 x - 3\right).\end{aligned}$$

(b) Obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i\sin x)^6$ wykorzystując dwa wzory: wzór de Moivre'a oraz wzór dwumianowy Newtona. Stosując wzór de Moivre'a otrzymamy równość

$$(\cos x + i\sin x)^6 = \cos 6x + i\sin 6x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$
\begin{aligned}
(\cos x+i\sin x)^6 &= (\cos x)^6+\binom{6}{1}(\cos x)^5(i\sin x)+\binom{6}{2}(\cos x)^4(i\sin x)^2+\binom{6}{3}(\cos x)^3\\
&\quad\times(i\sin x)^3+\binom{6}{4}(\cos x)^2(i\sin x)^4+\binom{6}{5}(\cos x)(i\sin x)^5+(i\sin x)^6\\
&=\cos^6 x+6i\cos^5 x\sin x-15\cos^4\sin^2 x-20i\cos^3 x\sin^3 x\\
&\qquad +15\cos^2 x\sin^4 x+6i\cos x\sin^5 x-\sin^6 x\\
&=\left(\cos^6 x-15\cos^4 x\sin^2 x+15\cos^2 x\sin^4 x-\sin^6 x\right)\\
&\qquad +i\left(6\cos^5 x\sin x-20\cos^3 x\sin^3 x+6\cos x\sin^5 x\right).
\end{aligned}
$$

Porównując części urojone prawych stron obu równości otrzymamy

$$\sin 6x = 6\cos^5 x\sin x-20\cos^3 x\sin^3 x+6\cos x\sin^5 x.$$

□ **Zadanie 1.10.** Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

(a) $\sin 3x$ przez $\sin x$; (b) $\cos 4x$ przez $\sin x$ i $\cos x$.

Odpowiedzi. (a) $\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)$; (b) $\cos^4 x-6\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x$.

■ **Przykład 1.11.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

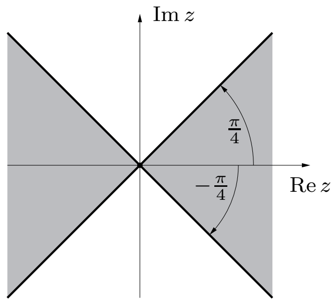
(a) $\mathrm{Re}\,\left(z^2\right)\geqslant 0$; (b) $\mathrm{Im}\,\left(z^6\right)<0$; (c) $\mathrm{Re}\,\left[(\overline{z})^3\right]>0$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy postać trygonometryczną liczby zespolonej (Przykład 1.7) oraz wzór de Moivre'a (Przykład 1.9).

(a) Dla $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, gdzie $r\geqslant 0$ oraz $0\leqslant\varphi<2\pi$ mamy

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\left(z^2\right)\geqslant 0 &\iff \mathrm{Re}\,\left\{\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^2\right\}\geqslant 0 \iff \mathrm{Re}\,\left[r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)\right]\geqslant 0\\
&\iff r^2\cos 2\varphi\geqslant 0 \iff r=0 \text{ lub } r>0 \text{ i } \cos 2\varphi\geqslant 0\\
&\iff r=0 \text{ lub } r>0 \text{ i } \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right).
\end{aligned}
$$

Poszukiwany zbiór składa się z dwóch domkniętych obszarów kątowych (rys.).



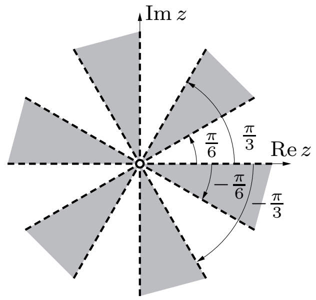
(b) Dla $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, gdzie $r\geqslant 0$ oraz $0\leqslant\varphi<2\pi$, mamy

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,\left(z^6\right)<0 &\iff \mathrm{Im}\,\left\{\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^6\right\}<0\\
&\iff \mathrm{Im}\,\left[r^6(\cos 6\varphi+i\sin 6\varphi)\right]<0 \iff
\end{aligned}
$$

$$\iff r^6 \sin 6\varphi < 0 \iff r > 0 \text{ i } \sin 6\varphi < 0$$

$$\iff r > 0 \text{ i } \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right).$$

Poszukiwany zbiór składa się z sześciu otwartych obszarów kątowych (rys.).



(c) Dla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r \geqslant 0$ oraz $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, mamy

$$\overline{z} = r\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right].$$

Zatem

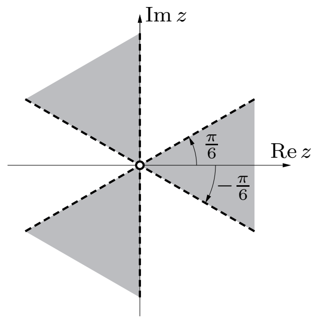
$$\operatorname{Re}\left[(\overline{z})^3\right] > 0 \iff \operatorname{Re}\left\{\left[r\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)\right]^3\right\} > 0$$

$$\iff \operatorname{Re}\left[r^3\left(\cos(-3\varphi) + i\sin(-3\varphi)\right)\right] > 0$$

$$\iff r^3\cos(-3\varphi) > 0 \iff r > 0 \text{ i } \cos 3\varphi > 0$$

$$\iff r > 0 \text{ i } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right).$$

Poszukiwany zbiór składa się z trzech otwartych obszarów kątowych (rys.).

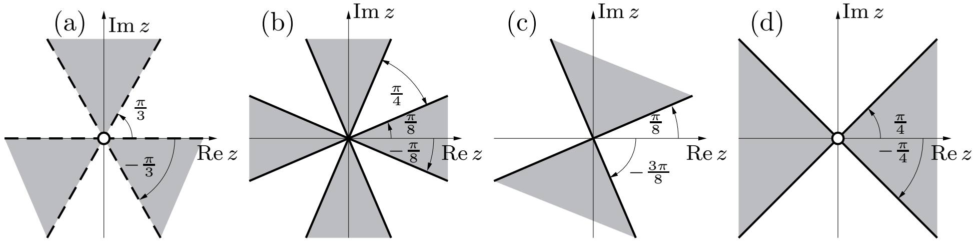


☐ **Zadanie 1.11.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

(a) $\operatorname{Im}\left(z^3\right) < 0$;   (b) $\operatorname{Re}\left(z^4\right) \geqslant 0$;

(c) $\operatorname{Im}\left(z^2\right) \geqslant \operatorname{Re}\left[(\overline{z})^2\right]$;   (d) $\operatorname{Im}\dfrac{(1+i)\,z}{(1-i)\overline{z}} \geqslant 0$.

Odpowiedzi. Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawiono na rysunkach.



1.3. Postać wykładnicza liczby zespolonej

■ **Przykład 1.12.** Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej z rozwiązać równania:

(a) $z^2 = (\overline{z})^2$; (b) $(\overline{z})^6 = 4\left|z^2\right|$; (c) $\dfrac{|z|^2 z}{(\overline{z})^3} = -1$; (d) $|z| \cdot z^2 = -i$.

Rozwiązanie. Zastępując symbolem $e^{i\varphi}$ wyrażenie $\cos\varphi + i\sin\varphi$ występujące w postaci trygonometrycznej liczby zespolonej $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ otrzymamy postać wykładniczą tej liczby, tzn. wzór $z = re^{i\varphi}$. Przy rozwiązywaniu równań będziemy korzystać z tego, że dwie niezerowe liczby zespolone są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich moduły są równe, a argumenty różnią się o wielokrotność 2π, tzn. dla $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $r_1, r_2 > 0$, mamy

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \text{ oraz } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

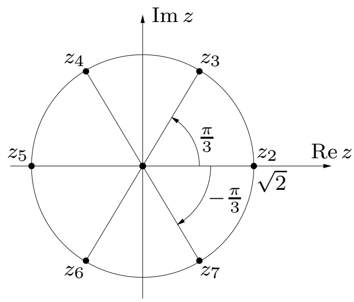
(a) Niech $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r \geqslant 0$ oraz $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Wtedy $\overline{z} = re^{-\varphi}$. Ponadto, ze wzoru de Moivre'a mamy $z^2 = r^2 e^{2i\varphi}$ oraz $(\overline{z})^2 = r^2 e^{-2i\varphi}$. Zatem

$$\begin{aligned} z^2 = -\left(\overline{z}\right)^2 &\iff r^2 e^{2i\varphi} = r^2 e^{-2i\varphi} \\ &\iff r = 0 \text{ albo } r > 0 \text{ oraz } 2\varphi = -2\varphi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff r = 0 \text{ albo } r > 0 \text{ oraz } \varphi = \frac{k\pi}{2} \text{ dla } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest zatem suma osi rzeczywistej i urojonej.

(b) Liczba $z = 0$ spełnia równanie $(\overline{z})^6 = 4\left|z^2\right|$. Niech teraz $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Wówczas $\overline{z} = re^{-i\varphi}$ oraz ze wzoru de Moivre'a $(\overline{z})^6 = r^6 e^{-6i\varphi}$. Dalej $\left|z^2\right| = r^2$, a więc

$$\begin{aligned} (\overline{z})^6 = 4\left|z^2\right| &\iff r^6 e^{-6i\varphi} = 4r^2 \\ &\iff r^6 e^{-6i\varphi} = 4r^2 e^{i\cdot 0} \\ &\iff \begin{cases} r^6 = 4r^2, \\ -6\varphi = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 0 \text{ lub } r = \sqrt{2}, \\ \varphi = \dfrac{l\pi}{3},\ l = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases} \end{aligned}$$



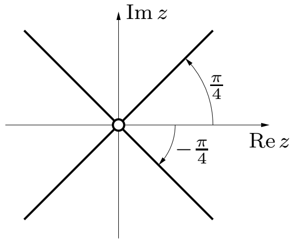
Rozwiązaniami równania są zatem liczby

$$z_1 = 0,\ z_2 = \sqrt{2},\ z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i,\ z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i,$$
$$z_5 = -z_2,\ z_6 = -z_3,\ z_7 = -z_4.$$

Są one przedstawione na rysunku.

(c) Równoważnie możemy napisać, że $|z|^2 \cdot z = (-1)\cdot(\overline{z})^3$ dla $z \neq 0$. Niech $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Wówczas

$$\begin{aligned}|z|^2 \cdot z = (-1)\cdot(\overline{z})^3 &\iff r^2 \cdot \left(re^{i\varphi}\right) = e^{i\pi}\cdot\left(r^3e^{-3i\varphi}\right)\\ &\iff r^3e^{i\varphi} = r^3e^{i(\pi-3\varphi)}\\ &\iff \begin{cases} r^3 = r^3, \\ \varphi = \pi - 3\varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} r \in (0,\infty), \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k = 0,1,2,3.\end{cases}\end{aligned}$$

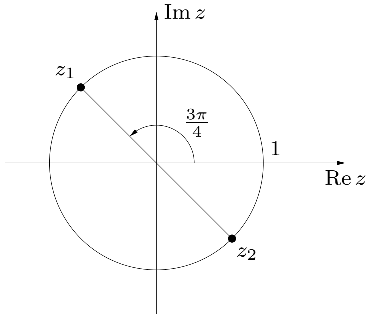


Rozwiązania równania tworzą więc dwie proste nachylone do osi rzeczywistej pod kątami $\pi/4$ oraz $-\pi/4$ i przechodzące przez punkt O, ale bez tego punktu (rys.). Dla $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r \geqslant 0$ oraz $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, mamy $|z| = r$ oraz $z^2 = r^2e^{2i\varphi}$. Ponadto $-i = 1\cdot e^{3\pi i/2}$. Równanie $|z|\cdot z^2 = -i$ przyjmie teraz równoważną postać

$$r^3e^{2i\varphi} = 1\cdot e^{\frac{3}{2}\pi i}.$$

(d) Stąd $r = 1$ oraz $2\varphi = 3\pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Zatem $\varphi = 3\pi/4 + k\pi$. Jedynymi wartościami k, dla których $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, są 0 i 1. Rozwiązaniami równania są zatem liczby:

$$z_1 = 1\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$
$$z_2 = 1\cdot e^{\frac{7\pi}{4}i} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$



□ **Zadanie 1.12.** Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej z rozwiązać równania:

(a) $z^7 = \overline{z}$; (b) $\overline{\left(z^4\right)} = z^2\left|z^2\right|$; (c) $(\overline{z})^2\left|z^2\right| = \dfrac{4}{z^2}$;

(d) $|z|^3 = iz^3$; (e) $z^6 = (\overline{z})^6$; (f) $\left|z^8\right| = z^4$.

Odpowiedzi. (a) $0, 1, \sqrt{2}/2+\sqrt{2}i/2, i, -\sqrt{2}/2+\sqrt{2}i/2, -1, -\sqrt{2}/2-\sqrt{2}i/2, -i, \sqrt{2}/2-\sqrt{2}i/2$; (b) suma trzech prostych: osi rzeczywistej oraz prostych nachylonych do tej osi pod kątem $\pi/3$ i przechodzących przez punkt O; (c) okrąg o środku w punkcie O i promieniu $\sqrt[3]{2}$; (d) suma trzech półprostych o początku w punkcie O : nieujemnej części osi urojonej oraz półprostych nachylonych do niej pod kątem $2\pi/3$; (e) suma sześciu prostych przecinających się w punkcie O : obu osi oraz prostych nachylonych do tych osi pod kątem $\pi/6$; (f) $0, 1, i, -1, -i$.

■ **Przykład 1.13.** Stosując wzory Eulera przedstawić:
(a) $\cos^5 x$; (b) $\sin^6 x$.
w postaci sumy sinusów lub cosinusów wielokrotności kąta x.

Rozwiązanie. Niech $x \in \mathbb{R}$. Wówczas zachodzą wzory (Eulera):

$$(1) \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad (2) \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

(a) Korzystając ze wzoru (1) oraz stosując wzór dwumianowy Newtona otrzymamy

$$\begin{aligned}
\cos^5 x &= \frac{1}{2^5}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^5 \\
&= \frac{1}{2^5}\left[\binom{5}{0}\left(e^{ix}\right)^5\left(e^{-ix}\right)^0 + \binom{5}{1}\left(e^{ix}\right)^4\left(e^{-ix}\right)^1 + \binom{5}{2}\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right)^2\right. \\
&\qquad \left. + \binom{5}{3}\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(e^{ix}\right)^1\left(e^{-ix}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(e^{ix}\right)^0\left(e^{-ix}\right)^5\right] \\
&= \frac{1}{2^5}\left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} + 5\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} + 10\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \\
&\qquad = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x).
\end{aligned}$$

(b) Korzystając ze wzoru (2) oraz stosując wzór dwumianowy Newtona otrzymamy

$$\begin{aligned}
\sin^6 x &= \frac{1}{(2i)^6}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^6 = \\
&= -\frac{1}{2^6}\left[\binom{6}{0}\left(e^{ix}\right)^6\left(e^{-ix}\right)^0 - \binom{6}{1}\left(e^{ix}\right)^5\left(e^{-ix}\right)^1 + \binom{6}{2}\left(e^{ix}\right)^4\left(e^{-ix}\right)^2\right. \\
&\left. -\binom{6}{3}\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right)^3 + \binom{6}{4}\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^4 - \binom{6}{5}\left(e^{ix}\right)^1\left(e^{-ix}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(e^{ix}\right)^0\left(e^{-ix}\right)^6\right] \\
&= -\frac{1}{2^6}\left(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\right) \\
&= -\frac{1}{2^5}\left(\frac{e^{i6x} + e^{-i6x}}{2} - 6\frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} + 15\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} - 10\right) \\
&= -\frac{1}{32}\left(10 - 15\cos 2x + 6\cos 4x - \cos 6x\right).
\end{aligned}$$

Uwaga. Otrzymane zależności można wykorzystać do obliczania całek nieoznaczonych funkcji $\cos^5 x$, $\sin^6 x$.

□ **Zadanie 1.13.** Stosując wzory Eulera przedstawić:

(a) $\sin^3 x$; (b) $\cos^2 x$; (c) $\sin^5 x$; (d) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

w postaci sumy sinusów lub cosinusów wielokrotności kąta x.

Odpowiedzi. (a) $(3\sin x - \sin 3x)/4$; (b) $(1+\cos 2x)/2$; (c) $(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)/16$; (d) $(\cos 4x + 3)/4$.

1.4. Pierwiastkowanie liczb zespolonych

■ **Przykład 1.14.** Korzystając z definicji obliczyć:

(a) $\sqrt{4i-3}$; (b) $\sqrt[3]{8}$; (c) $\sqrt[4]{-1}$.

Rozwiązanie. Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą równość $w^n = z$. Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

(a) Niech $x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie szukanym pierwiastkiem. Wtedy $(x+iy)^2 = 4i - 3$. Stąd $x^2 + 2ixy - y^2 = 4i - 3$. Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ 2xy = 4, \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są pary liczb: $x = 1,\ y = 2;\quad x = -1,\ y = -2$. Zatem

$$\sqrt{4i-3} = \{1+2i, -1-2i\}\,.$$

(b) Niech $x+iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie szukanym pierwiastkiem. Wtedy $(x+iy)^3 = 8$. Stąd $x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = 8$. Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 8, \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\left(x^2 - 3y^2\right) = 8, \\ y\left(3x^2 - y^2\right) = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania tego układu wynika, że $y = 0$ lub $3x^2 = y^2$. Wykorzystując te zależności w pierwszym równaniu układu otrzymamy $x^3 = 8$ lub $-8x^3 = 8$. Stąd $x = 2$ lub $x = -1$. Ostatecznie rozwiązaniem układu równań są pary liczb:

$$x = 2,\ y = 0;\quad x = -1,\ y = \sqrt{3};\quad x = -1,\ y = -\sqrt{3}.$$

Zatem

$$\sqrt[3]{8} = \left\{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\right\}.$$

(c) Niech $x+iy$, gdzie $x,\ y \in \mathbb{R}$, będzie szukanym pierwiastkiem. Wtedy $(x+iy)^4 = -1$. Stąd

$$x^4 + 4x^3yi - 6x^2y^2 - 4xy^3i + y^4 = \left(x^4 - 6x^2y^2 + y^4\right) + i4xy\left(x^2 - y^2\right) = -1.$$

Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = -1, \\ 4xy\left(x^2 - y^2\right) = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania układu wynika, że

$$xy = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - y^2 = 0.$$

Jeżeli $x = 0$ lub $y = 0$, to po wstawieniu do pierwszego równania otrzymamy odpowiednio równania $y^4 = -1$ lub $x^4 = -1$, które są sprzeczne. Jeżeli zaś $x^2 - y^2 = 0$, to po wstawieniu do pierwszego równania otrzymamy $-4x^4 = -1$, stąd

$$\left(x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad \left(y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Zatem

$$\sqrt[4]{-1} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right\}.$$

□ **Zadanie 1.14.** Korzystając z definicji obliczyć:

(a) $\sqrt{5-12i}$; (b) $\sqrt{-11+60i}$; (c) $\sqrt[3]{i}$; (d) $\sqrt[4]{16}$.

Odpowiedzi. (a) $\{3-2i, -3+2i\}$; (b) $\{5+6i, -5-6i\}$;
(c) $\left\{-i, (\sqrt{3}+i)/2, (-\sqrt{3}+i)/2\right\}$; (d) $\{2, 2i, -2, -2i\}$.

■ **Przykład 1.15.** Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej:

(a) $\sqrt{-2i}$; (b) $\sqrt[3]{-27}$; (c) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$; (d) $\sqrt[6]{1}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór na pierwiastki stopnia n z liczby zespolonej $z \neq 0$ o argumencie φ. Wzór ten ma postać: $\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$, gdzie

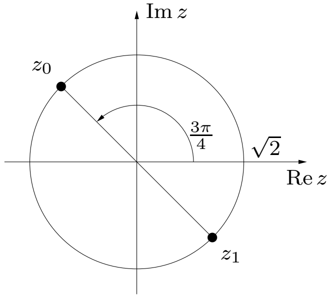
$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{dla} \ \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(a) Dla $z = -2i$ mamy $|z| = 2$ oraz $\arg z = 3\pi/2$. Zatem

$$\sqrt{-2i} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) : k = 0, 1\right\}.$$

Dla $k = 0$ mamy

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1+i.$$



Dla $k = 1$ otrzymujemy

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1-i.$$

Zatem $\sqrt{-2i} = \{-1+i, 1-i\}$.
(b) Dla $z = -27$ mamy $|z| = 27$ oraz $\arg z = \pi$. Zatem

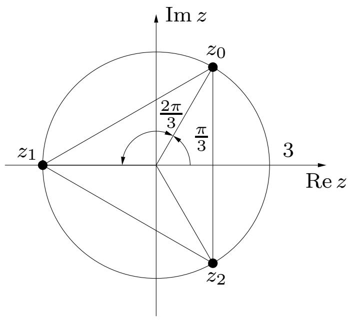
$$\sqrt[3]{-27} = \left\{ \sqrt[3]{27} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \,:\, k = 0, 1, 2 \right\}.$$

Dla $k = 0,\ 1,\ 2$ otrzymamy odpowiednio:

$$z_0 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right),$$

$$z_1 = 3 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) = 3(-1 + 0 \cdot i) = -3,$$

$$z_2 = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right).$$



Stąd $\sqrt[3]{-27} = \left\{ \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i, -3, \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i \right\}.$

(c) Dla $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ mamy $|z| = 16$ oraz $\arg z = 2\pi/3$. Zatem

$$\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \left\{ \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) \,:\, k = 0, 1, 2, 3 \right\}.$$

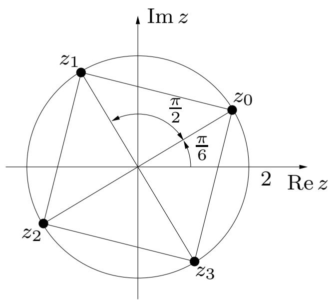
Tak więc dla $k = 0, 1, 2, 3$ mamy odpowiednio:

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \sqrt{3} + i,$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 1 - \sqrt{3}i.$$



Stąd $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \left\{ \sqrt{3} + i, -1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} - i, 1 - \sqrt{3}i \right\}.$

(d) Dla $z = 1$ mamy $|z| = 1$ oraz $\arg z = 0$. Zatem

$$\sqrt[6]{1} = \left\{ \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right) \,:\, k = 0, 1, \ldots, 5 \right\}.$$

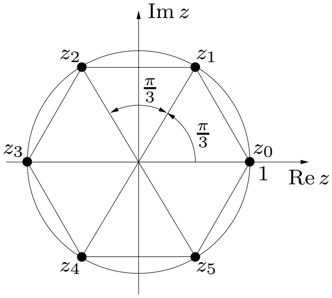
Tak więc dla $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ mamy odpowiednio:

$$z_0 = 1 \left(\cos 0 + i \sin 0 \right) = 1, \qquad z_1 = 1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$z_2 = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad z_3 = 1 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) = -1,$$

$$z_4 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_5 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ostatecznie $\sqrt[6]{1} = \left\{1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.



☐ **Zadanie 1.15.** Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej:

(a) $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$; (b) $\sqrt[3]{-27i}$; (c) $\sqrt[4]{-4}$; (d) $\sqrt[6]{-64}$; (e) $\sqrt[5]{32i}$;

(f) $\sqrt[3]{-1+i}$; (g) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$; (h*) $\sqrt[4]{i}$; (i*) $\sqrt[3]{2+2i}$.

Odpowiedzi. (a) $\left\{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)/2, -\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)/2\right\}$;

(b) $\left\{3i, -3\left(\sqrt{3}+i\right)/2, 3\left(\sqrt{3}-i\right)/2\right\}$;

(c) $\{1+i, -1+i, -1-i, 1-i\}$; (d) $\left\{\sqrt{3}+i, 2i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i, -2i, \sqrt{3}-i\right\}$;

(e) $\{2\left(\cos(\pi/10) + i\sin(\pi/10)\right), 2i, 2\left(\cos(9\pi/10) + i\sin(9\pi/10)\right),$
$2\left(\cos(13\pi/10) + i\sin(13\pi/10)\right), 2\left(\cos(17\pi/10) + i\sin(17\pi/10)\right)\}$;

(f) $\left\{(1+i)/\sqrt[3]{2}, \left[\left(-1-\sqrt{3}\right) + i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right]/2\sqrt[3]{2}, \left[\left(-1+\sqrt{3}\right) + i\left(-1-\sqrt{3}\right)\right]/2\sqrt[3]{2}\right\}$;

(g) $\left\{\sqrt{3}+i, -1+\sqrt{3}i, -\sqrt{3}-i, 1-\sqrt{3}i\right\}$;

(h*) $\{\pm(a+bi), \pm(b-ai)\}$, gdzie $a = 1+\sqrt{2}b$; $b = 1/\sqrt{4+2\sqrt{2}}$,

(i*) $\left\{(a+i)/\sqrt{2a}, \left[(1-a)+(a-1)i\right]/\sqrt{2a}, (-1-ai)/\sqrt{2a}\right\}$, gdzie $a = 2+\sqrt{3}$.

■ **Przykład 1.16.** Odgadując jeden z elementów pierwiastków obliczyć pozostałe:

(a) $\sqrt{(3-5i)^2}$; (b) $\sqrt[3]{(1+i)^6}$; (c) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór wyrażający elementy zbioru

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$$

w zależności od wybranego pierwiastka z_0, przy czym argument główny z_0 niekoniecznie musi być najmniejszy:

$$z_k = z_0\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\ \text{gdzie}\ 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

(a) Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt{(3-5i)^2}$ jest liczba $z_0 = 3-5i$. Drugi element tego zbioru wyraża się zatem wzorem

$$z_1 = z_0\,(\cos\pi + i\sin\pi) = (3-5i)\cdot(-1) = -3+5i.$$

(b) Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt[3]{(1+i)^6}$ jest liczba $z_0 = (1+i)^2 = 2i$. Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem

$$z_k = z_0\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad \text{gdzie } k = 1, 2.$$

Zatem

$$z_1 = 2i\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_2 = 2i\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3} - i.$$

(c) Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}}$ jest liczba

$$\begin{aligned} z_0 = \left(\sqrt{3}-i\right)^3 &= \left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]^3 \left(\begin{matrix}\text{wzór}\\ \text{Moivre'a}\end{matrix}\right) \\ &= 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -8i. \end{aligned}$$

Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem

$$z_k = z_0\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right), \quad \text{gdzie } k = 1, 2, 3.$$

Zatem

$$\begin{aligned} z_1 &= -8i\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -8i\cdot i = 8, \\ z_2 &= -8i\,(\cos\pi + i\sin\pi) = -8i\cdot(-1) = 8i, \\ z_3 &= -8i\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -8i\cdot(-i) = -8. \end{aligned}$$

□ **Zadanie 1.16.** Odgadując jeden z elementów pierwiastków obliczyć pozostałe:

(a) $\sqrt{(5-4i)^4}$; (b) $\sqrt[4]{(-2+3i)^4}$; (c) $\sqrt[3]{(2-i)^6}$; (d) $\sqrt[3]{(2-2i)^9}$.

Odpowiedzi. (a) $\{9-40i, -9+40i\}$; (b) $\{-2+3i, -3-2i, 2-3i, 3+2i\}$;
(c) $\left\{3-4i, -3/2+2\sqrt{3}+2i+3\sqrt{3}i/2, -3/2-2\sqrt{3}+2i-3\sqrt{3}i/2\right\}$;
(d) $\left\{-16(1+i), 8\left(1+\sqrt{3}+i-i\sqrt{3}\right), 8\left(1-\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}\right)\right\}$;

■ **Przykład 1.17.** Znaleźć rozwiązania równań:
(a) $z^6 = (2+4i)^6$; (b) $(z-i)^4 = (z+i)^4$; (c) $(iz+1)^3 = (z-1)^3$.

Rozwiązanie.

(a) Zauważmy, że rozwiązanie równania $z^6 = (2+4i)^6$ sprowadza się do znalezienia zbioru pierwiastków 6-tego stopnia z liczby $(2+4i)^6$. Jednym z elementów tego zbioru jest oczywiście liczba $z_0 = 2+4i$. Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem:

$$z_k = z_0\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right) \quad (1 \leqslant k \leqslant 5).$$

Zatem

$$z_1 = (2+4i)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = (2+4i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - 2\sqrt{3} + \left(2+\sqrt{3}\right)i,$$

$$z_2 = (2+4i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = (2+4i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - 2\sqrt{3} + \left(-2+\sqrt{3}\right)i,$$

$$z_3 = (2+4i)(\cos\pi + i\sin\pi) = (2+4i)(-1) = -2-4i,$$

$$z_4 = (2+4i)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = (2+4i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + 2\sqrt{3} - \left(2+\sqrt{3}\right)i,$$

$$z_5 = (2+4i)\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = (2+4i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + 2\sqrt{3} + \left(2-\sqrt{3}\right)i.$$

(b) Oczywiście $z \neq -i$. Zatem równanie ma równoważną postać

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1,$$

która jest z kolei równoważna alternatywie równań

$$\frac{z-i}{z+i} = \omega_k \;\; (0 \leqslant k \leqslant 3),$$

gdzie $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \sqrt[4]{1}$. Ponieważ $\sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\}$, zatem równania te przyjmują postać $z-i = z+i$ lub $z-i = -(z+i)$ lub $z-i = i(z+i)$ lub $z-i = -i(z+i)$. Pierwsze z tych równań jest sprzeczne, a pozostałe mają odpowiednio rozwiązania $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$.

(c) $z = 1$ nie jest pierwiastkiem równania, zatem możemy je zapisać w równoważnej postaci

$$\left(\frac{iz+1}{z-1}\right)^3 = 1,$$

która z kolei jest równoważna alternatywie równań

$$\frac{iz+1}{z-1} = \omega_k \; (0 \leqslant k \leqslant 2),$$

gdzie ω_k są elementami zbioru $\sqrt[3]{1}$. Ponieważ

$$\sqrt[3]{1} = \left\{1, -1/2 + \sqrt{3}i/2, -1/2 - \sqrt{3}i/2\right\},$$

więc otrzymamy równania:

$$\frac{iz+1}{z-1} = 1, \quad \frac{iz+1}{z-1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{iz+1}{z-1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Rozwiązaniami tych równań są:

$$z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -\left(1 + \sqrt{3}\right)(1+i)/2, \quad z_2 = \left(\sqrt{3} - 1\right)(1+i)/2.$$

□ **Zadanie 1.17.** Znaleźć rozwiązania równań:

(a) $z^4 = (1-i)^4$; (b) $(z-1)^6 = (i-z)^6$;

(c) $z^3 = (iz+1)^3$; (d*) $(z+2i)^8 + (z-2i)^8 = 0$.

Odpowiedzi. (a) $1-i, 1+i, -1-i, -1+i$; (b) $(1+i)/2$, $\left(2-\sqrt{3}+i\right)/\left(3+i\sqrt{3}\right)$, $\left(2+\sqrt{3}+i\right)/\left(3-i\sqrt{3}\right)$, $\left(2-\sqrt{3}-i\right)/\left(1+i\sqrt{3}\right)$, $\left(2+\sqrt{3}-i\right)/\left(1-i\sqrt{3}\right)$;
(c) $1/(1-i)$, $-2/\left(1+i\left(2-\sqrt{3}\right)\right)$, $-2/\left(1+i\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$;
d*) $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{7-4\sqrt{2}} + i\sqrt{4\sqrt{2}-5}\right)$, $z_2 = \overline{z_1}$, $z_3 = -z_1$, $z_4 = -\overline{z_1}$,
$z_5 = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{7+4\sqrt{2}} + i\sqrt{4\sqrt{2}+5}\right)$, $z_6 = \overline{z_5}$, $z_7 = -z_5$, $z_8 = -\overline{z_5}$.