

**ALGEBRA
I
GEOMETRIA
ANALITYCZNA**

Teresa Jurlewicz Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA I GEOMETRIA ANALITYCZNA

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie dwudzieste szóste poprawione



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2025

Teresa Jurlewicz
Przedsiębiorstwo Informatyczne
YUMA
teresa.jurlewicz@yuma.com.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1994 – 2025 Teresa Jurlewicz and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto, utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978-83-67234-23-8

Wydanie XXVI poprawione, Wrocław 2025
Oficina Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. Kom.

Spis treści

Wstęp	7
1. Liczby zespolone	9
1.1 Podstawowe definicje i własności	9
1.2 Postać algebraiczna liczby zespolonej	11
1.3 Postać trygonometryczna liczby zespolonej	14
1.4 Postać wykładnicza liczby zespolonej	23
1.5 Pierwiastkowanie liczb zespolonych	25
2. Wielomiany	28
2.1 Podstawowe definicje i własności	28
2.2 Pierwiastki wielomianów	29
2.3 Zasadnicze twierdzenie algebry	33
2.4 Ułamki proste	37
3. Macierze i wyznaczniki	40
3.1 Macierze – podstawowe określenia	40
3.2 Działania na macierzach	44
3.3 Definicja indukcyjna wyznacznika	51
3.4 Definicja permutacyjna wyznacznika*	56
3.5 Własności wyznaczników	57
3.6 Macierz odwrotna	65
3.7 Algorytm Gaussa – Jordana	71
4. Układy równań liniowych	73
4.1 Podstawowe określenia	73
4.2 Układy Cramera	74
4.3 Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera–Capellego	77
4.4 Metody rozwiązywania układów Cramera	80
4.5 Metody rozwiązywania dowolnych układów równań	82
4.6 Wartości i wektory własne macierzy	87

5. Geometria analityczna w przestrzeni	90
5.1 Wektory	90
5.2 Iloczyn skalarny	96
5.3 Iloczyn wektorowy	98
5.4 Iloczyn mieszany	102
5.5 Równania płaszczyzny	105
5.6 Równania prostej	109
5.7 Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn	111
6. Krzywe stożkowe	118
6.1 Podstawowe definicje i własności	118
6.2 Okrąg	120
6.3 Elipsa	122
6.4 Hiperbola	125
6.5 Parabola	130
6.6 Krzywe stożkowe w przyrodzie, nauce i technice	133
Odpowiedzi i wskazówki	139
Literatura	155
Skorowidz	156

Wstęp

Niniejsza książka* jest pierwszą częścią zestawu podręczników do przedmiotu Algebra z geometrią analityczną. Pozostałymi częściami zestawu są zbiór zadań pt. „*Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania*” oraz opracowanie pt. „*Algebra i geometria analityczna. Kolokwia i egzaminy*”. Książki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów oraz uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych oraz wojskowych.

Materiał zawarty w podręczniku obejmuje liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych, geometrię analityczną w przestrzeni oraz krzywe stożkowe. Wszystkie zagadnienia teoretyczne zakończone są ćwiczeniami, przy czym początkowe z nich są z reguły najprostsze. Do wybranych twierdzeń podane są dowody. Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza aktualnie obowiązujący program przedmiotu. W ten sam sposób oznaczono trudniejsze ćwiczenia. Dodatkowy materiał oraz trudniejsze ćwiczenia dołączono z myślą o studentach, którzy chcą rozszerzyć swoją wiedzę z algebry i geometrii analitycznej. Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań z tego przedmiotu zachęcamy do zapoznania się z książką „*Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami*”.

Równolegle do materiału teoretycznego omawianego na wykładach studenci powinni rozwiązywać samodzielnie zadania. Zbiór takich zadań wraz z metodami ich rozwiązywania można znaleźć w drugiej części zestawu pt. „*Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania*”.

Ćwiczenia z tej książki oraz zadania z drugiej części podręcznika są podobnych typów i mają ten sam stopień trudności jak zadania, które zwykle pojawiają na kolokwiah i egzaminach. Zestawy zadań, które w poprzednich latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na sprawdzianach, umieszczone są w trzeciej części zestawu pt. „*Algebra i geometria analityczna. Kolokwia i egzaminy*”.

*Do 2005 r. książka miała tytuł „*Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*”.

Do obecnego wydania dodano kilka nowych ćwiczeń. Ponadto, poprawiono zauważone błędy i usterki.

Serdecznie dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o poprzednich wydaniach podręcznika. Podziękowania składamy także dr. Jerzemu Cisło za wyjaśnienia spraw związanych z nawigacją w żeglarskim.

Teresa Jurlewicz

Zbigniew Skoczylas

1.

Liczby zespolone

W pierwszym rozdziale wprowadzamy liczby zespolone oraz działania na nich. Następnie omawiamy postać algebraiczną, trygonometryczną i wykładniczą tych liczb. Rozdział kończymy pierwiastkowaniem liczb zespolonych.

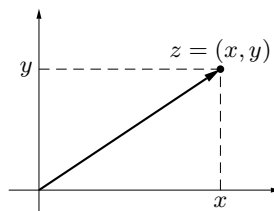
1.1. Podstawowe definicje i własności

Definicja 1.1. (*liczba zespolona, działania w zbiorze liczb zespolonych*)

Liczbą zespoloną nazywamy parę uporządkowaną liczb rzeczywistych, np. (x, y) , (u, v) , (a, b) . Liczby zespolone oznaczamy krótko przez z , w itp. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$. Mamy zatem

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Liczbę zespoloną $z = (x, y)$ przedstawiamy na płaszczyźnie w postaci punktu o współrzędnych (x, y) albo wektora o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu (x, y) . W tej interpretacji zbiór wszystkich liczb zespolonych nazywamy *płaszczyzną zespoloną*.



Rys. 1.1. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

W zbiorze $\mathbb{C}$ wprowadzamy dwa działania – dodawanie i mnożenie. Sumę liczb zespolonych $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ określamy wzorem:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

a ich iloczyn wzorem:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Uwaga. Z określenia pary uporządkowanej wynika, że liczby zespolone $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = y_2$. Iloczyn $z \cdot z \cdot \dots \cdot z$ złożony z n czynników zespolonych z oznaczamy przez z^n .

Notka historyczna. Liczby zespolone pojawiły się po raz pierwszy w XVI wieku. Wykorzystywano je (używając formalnie symbolu $\sqrt{-1}$) do obliczania

pierwiastków rzeczywistych wielomianów stopnia trzeciego (wzory Cardana^{*}). Pierwszą ścisłą teorię liczb zespolonych podał w XIX wieku Carl Gauss[†]. Jego interpretacja geometryczna liczb zespolonych oraz wprowadzona symbolika są stosowane współcześnie.

Ćwiczenie 1.2. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej liczby:

- (a) $z_1 = (3, 2)$; (b) $z_2 = (-3, 1)$; (c) $z_3 = (10, 0)$; (d) $z_4 = (0, -4)$.

Ćwiczenie 1.3. Dla $z_1 = (0, 1)$, $z_2 = (3, -4)$ oraz $z_3 = (\sqrt{2}, -3)$ obliczyć:

- (a) $z_1 + z_2$, $z_2 + z_3$; (b) $z_1 \cdot z_2$, $z_2 \cdot z_3$; (c) $(z_1)^2$.

Ćwiczenie 1.4. (*własności działań w zbiorze liczb zespolonych*)

Niech z_1, z_2, z_3 będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Pokazać, że:

- (1) dodawanie liczb zespolonych jest:
 - (a) przemienne, tzn. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
 - (b) łączne, tzn. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
- (2) dla każdej liczby zespolonej z liczba $\mathbf{0} = (0, 0)$ spełnia równość $z + \mathbf{0} = z$;
- (3) dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y)$ liczba $-z = (-x, -y)$ spełnia równość $z + (-z) = \mathbf{0}$;
- (4) mnożenie liczb zespolonych jest
 - (a) przemienne, tzn. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
 - (b) łączne, tzn. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;
- (5) dla każdej liczby zespolonej z liczba $\mathbf{1} = (1, 0)$ spełnia równość $z \cdot \mathbf{1} = z$;
- (6) dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y) \neq \mathbf{0}$ liczba

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

spełnia równość $z \cdot \frac{1}{z} = \mathbf{1}$;

- (7) mnożenie liczb zespolonych jest rozdzielne względem dodawania, tzn.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Uwaga. Liczby zespolone $\mathbf{0}$, $-z$, $\mathbf{1}$ oraz $1/z$, wprowadzone odpowiednio w punktach (2), (3), (5) oraz (6), są jedynymi liczbami o żądanych własnościach. Liczby te nazywamy: $\mathbf{0}$ – elementem neutralnym dodawania, $-z$ – elementem przeciwnym do liczby z , $\mathbf{1}$ – elementem neutralnym mnożenia, $1/z$ – elementem odwrotnym do liczby z .

^{*}Geronimo Cardano (1501-1576), matematyk, filozof i lekarz włoski.

[†]Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matematyk, astronom i fizyk niemiecki.

Ćwiczenie 1.5. Pokazać, że jeżeli liczby zespolone z_1, z_2 spełniają warunek $z_1 \cdot z_2 = 0$, to $z_1 = 0$ lub $z_2 = 0$.

Definicja 1.6. (różnica i iloraz liczb zespolonych)

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi.

Różnicę liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Iloraz liczb zespolonych określamy wzorem:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}, \text{ o ile } z_2 \neq 0.$$

Uwaga. Wszystkie reguły podstawowych działań algebraicznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie), znane dla liczb rzeczywistych, obowiązują także w zbiorze liczb zespolonych. W szczególności prawdziwe są wzory skróconego mnożenia, wzór dwumianowy Newtona, wzory na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego itp.

Ćwiczenie 1.7. Obliczyć:

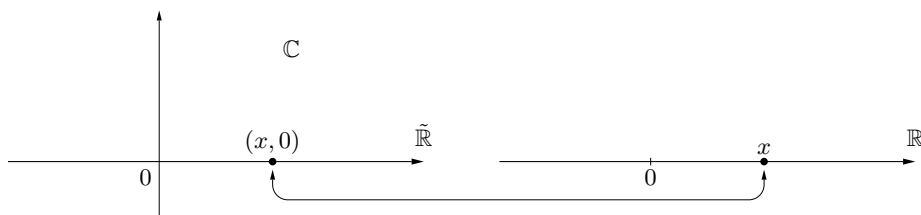
(a) $(4, -1) - (-3, 5)$; (b) $\frac{(-1, -2)}{(3, 4)}$; (c) $\frac{(0, -6)}{(0, 2)}$.

Uwaga. Łatwo zauważyć, że liczby zespolone postaci $(x, 0)$ ($x \in \mathbb{R}$) mają następujące własności:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0); \quad (x_1, 0) - (x_2, 0) = (x_1 - x_2, 0);$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0); \quad \frac{(x_1, 0)}{(x_2, 0)} = \left(\frac{x_1}{x_2}, 0 \right), \text{ o ile } x_2 \neq 0.$$

Z własności tych wynika, że zbiór $\tilde{\mathbb{R}} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ można utożsamiać ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Będziemy pisali zatem x zamiast $(x, 0)$.



Rys. 1.2. Zbiory $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$

1.2. Postać algebraiczna liczby zespolonej

Definicja 1.8. (jednostka urojona)

Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy *jednostką urojoną* i oznaczamy ją symbolem i : $i = (0, 1)$.

Ćwiczenie 1.9. Pokazać, że liczba i jest rozwiązaniem równania $z^2 + 1 = 0$.

FAKT 1.10. (*postać algebraiczna liczby zespolonej*)

Każdą liczbę zespoloną z można jednoznacznie zapisać w postaci:

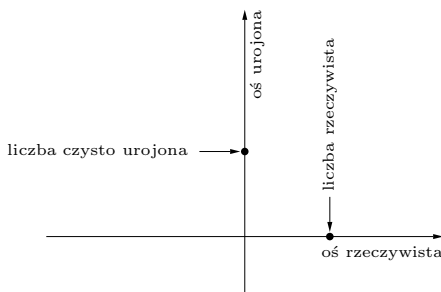
$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy *postacią algebraiczną*. Liczbę x nazywamy wówczas *częścią rzeczywistą* (z łac. *realis*) liczby zespolonej z , co zapisujemy $\operatorname{Re} z = x$, a liczbę y jej *częścią urojoną* (z łac. *imaginalis*), co zapisujemy $\operatorname{Im} z = y$. Ponadto, łatwo zauważyć, że liczby zespolone w postaci algebraicznej $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i odpowiednio urojone są równe, czyli, gdy

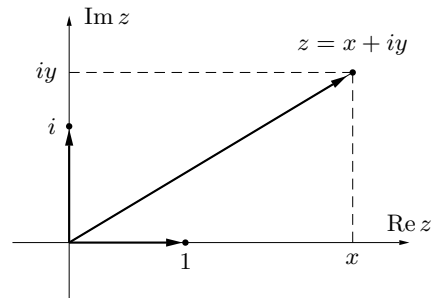
$$\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

Dowód. Zauważmy, że $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, co po utożsamieniu liczb postaci $(x, 0)$ z liczbami x oznacza, że $z = x + iy$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Jednoznaczność tego przedstawienia wynika z tego, że gdyby jednocześnie zachodził związek $z = x_1 + iy_1$ dla $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, to mielibyśmy $(x_1, 0) + (0, 1)(y_1, 0) = (x_1, y_1) = (x, y)$, a więc $x_1 = x$, $y_1 = y$.

Uwaga. Liczbę zespoloną postaci iy ($y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) nazywamy *czysto urojoną*. Nie każde przedstawienie liczby zespolonej w formie $x + iy$ jest jej postacią algebraiczną. Niezbędne jest dodanie warunku $x, y \in \mathbb{R}$. Np. przedstawienie $1 + i(-2i)$ nie jest postacią algebraiczną liczby 3.



Rys. 1.3. Osie rzeczywista i urojona na płaszczyźnie zespolonej



Rys. 1.4. Interpretacja geometryczna postaci algebraicznej liczby zespolonej

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb zespolonych w postaci algebraicznej wykonujemy tak jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów zmiennej i , przy warunku $i^2 = -1$. Przy dzieleniu przez liczbę zespoloną $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) należy dzielną i dzielnik pomnożyć przez $x - iy$, aby w mianowniku uzyskać liczbę rzeczywistą.

Ćwiczenie 1.11. Wykonać działania:

- (a) $(1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{2}i)$; (b) $(3i - 2) - (1 - 2i)$;
 (c) $(1 + 2i)(-3 + 4i)$; (d) $\frac{4 + 5i}{2 - i}$.

Ćwiczenie 1.12. Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Uzasadnić równości:

- (a) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$; (b) $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$;
 (c) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$; (d) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$.

Ćwiczenie 1.13. Znaleźć liczby zespolone spełniające warunki:

- (a) $z^2 + 4i = 0$; (b) $\operatorname{Re} z - 3\operatorname{Im} z = 2$; (c) $\operatorname{Re}(iz) + 1 = 0$;
 (d) $\frac{z + 2}{i - 1} = \frac{3z + i}{2 + i}$; (e) $z^2 - 6z + 10 = 0$; (f) $\operatorname{Im}(z^2) = (2 - i)z$.

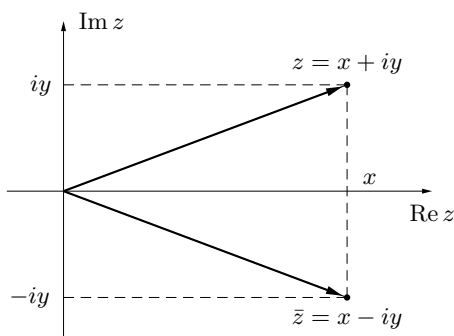
Wsk. Wykorzystać przedstawienie algebraiczne liczb zespolonych i warunków ich równości

Definicja 1.14. (*sprzężenie liczby zespolonej*)

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z}$ określoną wzorem:

$$\bar{z} = x - iy.$$

Liczba sprzężona do liczby zespolonej jest jej obrazem w symetrii względem osi $\operatorname{Re} z$ (rys. 1.5).



Rys. 1.5. Interpretacja geometryczna sprzężenia liczby zespolonej

FAKT 1.15. (*własności sprzężenia liczb zespolonych*)

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wtedy

- (1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; (2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;
 (3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; (4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, o ile $z_2 \neq 0$.

Uwaga. Równości w punktach (1) i (3) są prawdziwe dla dowolnej liczby odpowiednio składników i czynników.

Dowód. Udowodnimy własności (1), (4). Dowody pozostałych własności sprzężenia liczb zespolonych pozostawiamy Czytelnikowi. Niech $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ($x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$). Wtedy mamy odpowiednio

$$(1) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

$$(4) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right)} = \frac{\overline{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}}{\overline{(x_2^2 + y_2^2)}} = \frac{\overline{x_1x_2 + y_1y_2}}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{\overline{x_2y_1 - x_1y_2}}{x_2^2 + y_2^2}i \\ = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i = \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Ćwiczenie 1.16. Sprawdzić, że

$$(a) \ z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z; \quad (b) \ z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z; \quad (c) \ \overline{\overline{z}} = z; \quad (d) \ \operatorname{Im}(\overline{z}) = -\operatorname{Im} z.$$

Ćwiczenie 1.17. Rozwiązać równania:

$$(a) \ 2z + (3 - i)\overline{z} = 5 + 4i; \quad (b) \ z + i = \overline{z + i}; \\ (c) \ z \cdot \overline{z} + (z - \overline{z}) = 3 + 2i; \quad (d) \ z + \overline{z} + i(z - \overline{z}) = 5 + 3i.$$

Wsk. Wykorzystać przedstawienie algebraiczne liczb zespolonych i warunek ich równości

Ćwiczenie 1.18. Uzasadnić równoważności:

$$(a) \ \text{liczba zespolona } z \text{ jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy } z = \overline{z}; \\ (b) \ \text{liczba zespolona } z \neq 0 \text{ jest liczbą czysto urojoną wtedy i tylko wtedy, gdy } z = -\overline{z}.$$

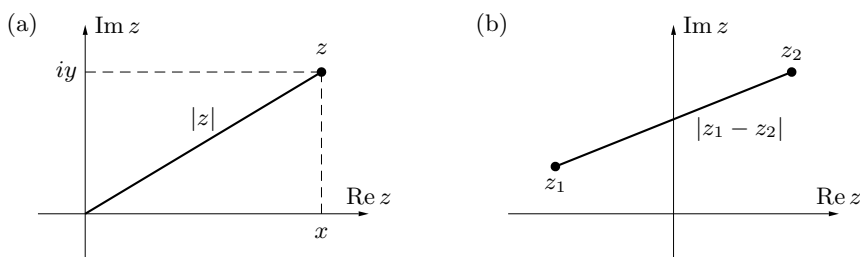
Ćwiczenie 1.19. Dlaczego w zbiorze liczb zespolonych nie można wprowadzić relacji nierówności ($\leq$) tak, aby zachowane były jej własności ze zbioru liczb rzeczywistych?

1.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Definicja 1.20. (*moduł liczby zespolonej*)

Modulem liczby zespolonej $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą $|z|$ określoną wzorem:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Rys. 1.6. Interpretacja geometryczna modułu:
(a) liczby zespolonej, (b) różnicy liczb zespolonych

Uwaga. Moduł liczby zespolonej jest uogólnieniem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Geometrycznie moduł liczby zespolonej z jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych (rys. 1.6 (a)). Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1, z_2 (rys. 1.6 (b)).

Ćwiczenie 1.21. Obliczyć moduły liczb zespolonych:

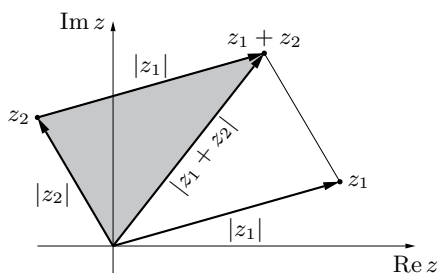
(a) $z = -i$; (b) $z = -1 + 3i$; (c) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; (d) $z = -5 - 12i$.

FAKT 1.22. (własności modułu liczby zespolonej)

Dla dowolnych liczb zespolonych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzą relacje:

(1) $|\bar{z}| = |z| = |-z|$; (2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; (3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(4) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, o ile $z_2 \neq 0$; (5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; (6) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Uwaga. Warunki w punktach (3) i (5) powyższego faktu prawdziwe są dla dowolnej liczby odpowiednio czynników i składników. W szczególności mamy $|z^n| = |z|^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Nierówność (5) jest nazywana *nierównością trójkąta* (rys. 1.7).



Rys. 1.7. Interpretacja geometryczna nierówności trójkąta

Dowód. Niech $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Wtedy mamy kolejno:

(1) $|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$,
 $|-z| = |-x - iy| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

(2) $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$

(3) Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Korzystając z własności (2) otrzymamy

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1) (z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1| |z_2|)^2.$$

Pierwiastkując obustronnie dostaniemy żadaną równość, korzystamy przy tym z tego, że $|z_1 \cdot z_2| \geq 0$ oraz $|z_1| \cdot |z_2| \geq 0$.

(4) Niech $z_2 \neq 0$. Wykorzystując poprzednie własności mamy

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \right| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1 \bar{z}_2| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1| |z_2| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

(5) Możliwe są dwa przypadki $z_1 + z_2 = 0$ lub $z_1 + z_2 \neq 0$. W pierwszym przypadku nierówność jest oczywista. Załóżmy więc, że $z_1 + z_2 \neq 0$. Wtedy, wobec wzoru $\operatorname{Re}(u+w) = \operatorname{Re} u + \operatorname{Re} w$, nierówności $\operatorname{Re} u \leq |u|$ i równości $|u/w| = |u|/|w|$, mamy kolejno

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) \\ &\leq \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|}. \end{aligned}$$

Stąd oraz z oczywistej równości $\operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) = 1$, otrzymamy

$$\frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \geq 1,$$

co po pomnożeniu stron przez $|z_1 + z_2|$ daje żadaną nierówność.

(6) Z poprzedniej nierówności wynika, że

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \quad \text{oraz} \quad |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|.$$

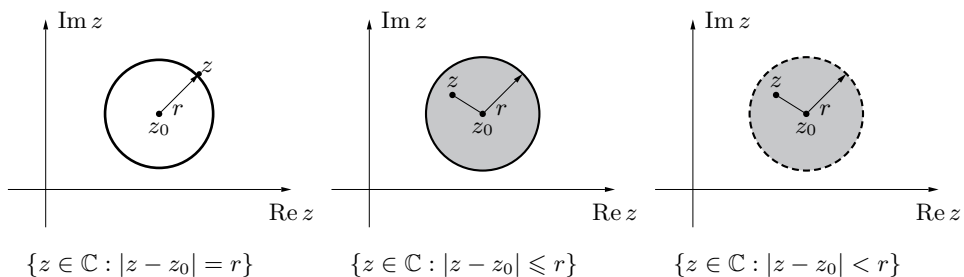
Zatem

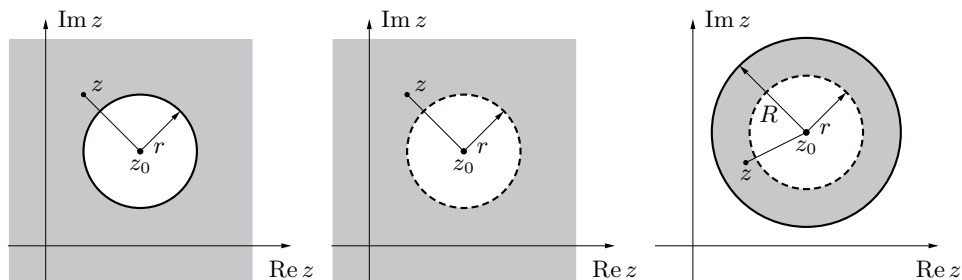
$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|, \quad \text{więc} \quad \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|.$$

Ćwiczenie 1.23. Obliczyć moduły liczb zespolonych:

(a) $(1+2i)(3-4i)$; (b) $\frac{4+i}{3+2i}$; (c) $(1+\sqrt{2}i)^4$; (d) $\frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{2}+2i)^3}.$

Interpretacje geometryczne równań i nierówności z modulem

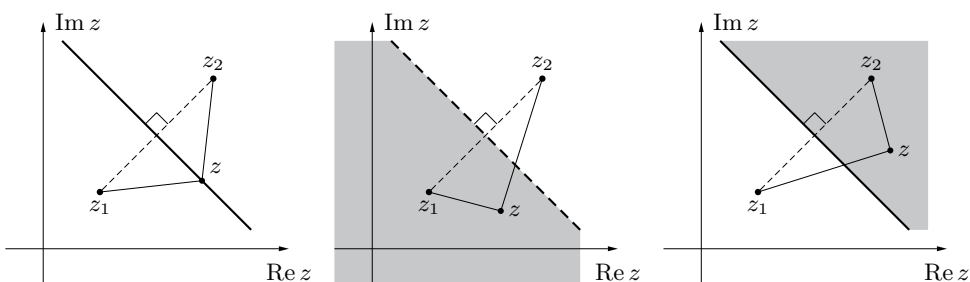




$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \geq r\}$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$$

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| \leq R\}$$



$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = |z - z_2|\}$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| < |z - z_2|\}$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \geq |z - z_2|\}$$

Ćwiczenie 1.24. Narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

(a) $|z + i| = 3$;

(b) $|2iz + 6| \leq 4$;

(c) $2 < |z + 2 - i| \leq 3$;

(d) $|z + 5| = |3i - z|$;

(e) $\left| \frac{z - 3}{z - 3i} \right| > 1$;

(f) $|\bar{z} + 2 - i| \leq |z|$;

(g*) $|z + i| + |z - i| = 2$;

(h) $\left| \frac{z + i}{z^2 + 1} \right| \leq 1$;

(i) $3|z - 1| \leq |z^2 - 1| < 6|z + 1|$.

Ćwiczenie 1.25. Uzasadnić, że równość

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

jest prawdziwa dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 . Podać interpretację geometryczną tej tożsamości.

Definicja 1.26. (*argument i argument główny liczby zespolonej*)

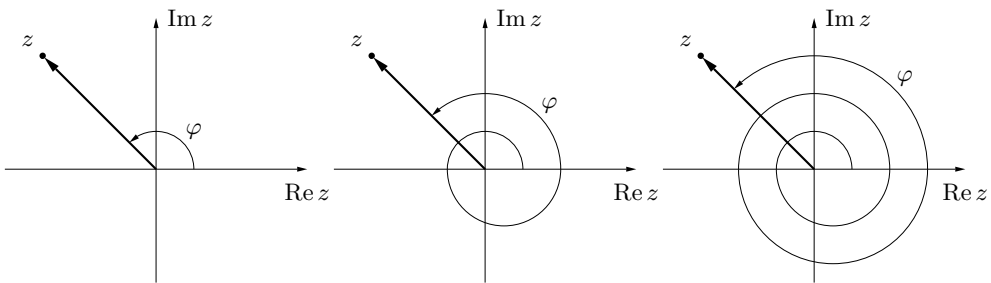
Argumentem liczby zespolonej $z = x + iy \neq 0$ ($x, y \in \mathbb{R}$) nazywamy każdą liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą układ równań:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Przyjmujemy, że argumentem liczby zespolonej $z = 0$ jest dowolna liczba $\varphi \in \mathbb{R}$. *Argumentem głównym* liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument φ tej liczby spełniający nierówności $0 \leq \varphi < 2\pi$. Przyjmujemy, że argumentem głównym liczby $z = 0$ jest 0. Argument główny liczby zespolonej z oznaczamy przez $\arg z$. Każdy argument φ liczby zespolonej $z \neq 0$ ma postać

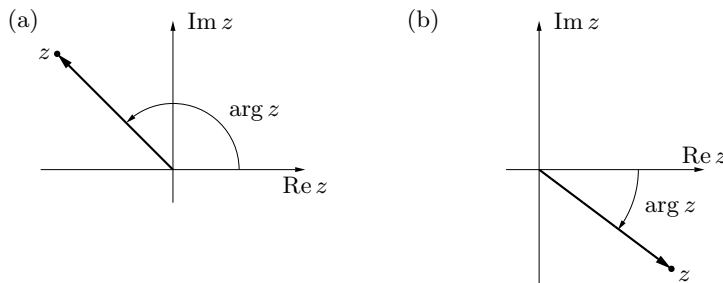
$$\varphi = \arg z + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Uwaga. Argumenty liczby zespolonej są miarami kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej i wektor wodzący tej liczby (rys. 1.8). Argument główny liczby zespolonej jest najmniejszą nieujemną miarą kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej i wektor wodzący tej liczby (rys. 1.9 (a)).



Rys. 1.8. Argumenty liczby zespolonej

Czasem wygodnie jest przyjąć, że argument główny liczby zespolonej jest liczbą z przedziału $(-\pi, \pi]$ (rys. 1.9 (b)).



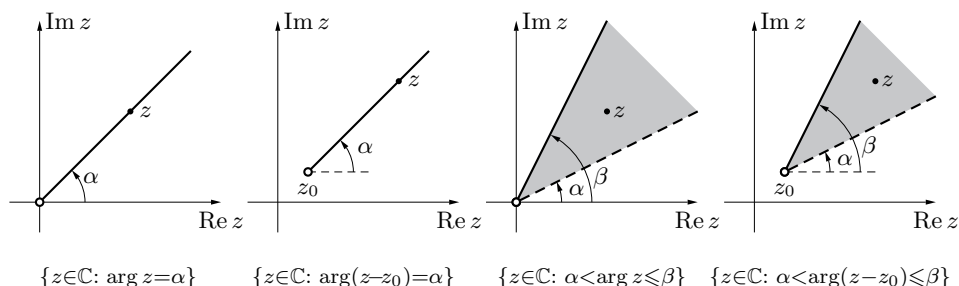
Rys. 1.9. Argument główny liczby zespolonej

Ćwiczenie 1.27. Znaleźć argumenty główne liczb zespolonych:

- (a) $z = 2$; (b) $z = i$; (c) $z = -\pi$;
 (d) $z = 3 - 3i$; (e) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; (f) $z = -3 + 4i$.

W ćwiczeniu (f) wykorzystać kalkulator lub komputer.

Interpretacje geometryczne równań i nierówności z argumentem



Ćwiczenie 1.28. Narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

- (a) $\arg z = \frac{\pi}{4}$; (b) $\arg(z+i) = \pi$; (c) $\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{2}$; (d) $|\pi - \arg(z+1)| \geq \frac{3\pi}{4}$.

Ćwiczenie* 1.29. Niech $z \neq 0$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Pokazać, że

(1) $\arg(\bar{z}) = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$;

(2) $\arg(-z) = \begin{cases} \arg z + \pi, & \text{gdy } 0 \leq \arg z < \pi, \\ \arg z - \pi, & \text{gdy } \pi \leq \arg z < 2\pi; \end{cases}$

(3) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$.

Korzystając z powyższych wzorów narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

(a) $\arg(-z) = \frac{2\pi}{3}$; (b) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{5\pi}{6}$; (c) $\arg(\bar{z}) = \frac{3\pi}{4}$;

(d) $\frac{\pi}{6} \leq \arg\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{\pi}{2}$; (e) $\frac{\pi}{4} < \arg(\bar{z}) \leq \frac{3\pi}{4}$; (f) $\frac{\pi}{6} \leq \arg(2+i-z) \leq \pi$;

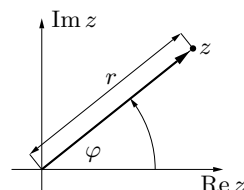
(g) $\arg(-\bar{z}) \geq \frac{\pi}{2}$; (h) $\arg\left(\frac{1}{z+i}\right) < \pi$; (i) $\pi < \arg[(1+i)z] < \frac{3\pi}{2}$.

FAKT 1.30. (postać trygonometryczna liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r \geq 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Liczba r jest wówczas modulem liczby z , a φ jednym z jej argumentów (rys. 1.10). Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy *postacią trygonometryczną*.



Rys. 1.10. Interpretacja geometryczna postaci trygonometrycznej liczby zespolonej

Uwaga. Łatwo pokazać, że liczby zespolone w postaci trygonometrycznej

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

są równe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$r_1 = r_2 = 0 \text{ albo } r_1 = r_2 > 0 \text{ oraz } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}.$$

Dowód. Dla liczby $z = 0$ mamy $r = |z| = 0$ i równość zachodzi dla dowolnej wartości $\varphi \in \mathbb{R}$. Dla $z \neq 0$ mamy

$$z = x + iy = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie r jest modulem, a φ argumentem liczby z . Gdyby równość $z = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ zachodziła dla innych liczb $r_1 \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, to mielibyśmy

$$|z| = \sqrt{(r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_1 \sin \varphi_1)^2} = r_1 = r.$$

Z układu równań $\cos \varphi_1 = \cos \varphi$, $\sin \varphi_1 = \sin \varphi$ wynika związek $\varphi_1 = \varphi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Zatem liczba φ_1 też jest argumentem liczby z .

Ćwiczenie 1.31. Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej (w razie potrzeby wykorzystać kalkulator lub komputer):

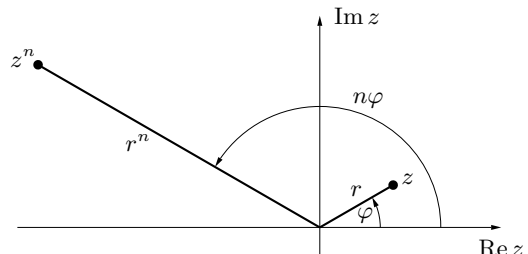
- (a) $z = -1$; (b) $z = 1 + i$; (c) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
 (d) $z = 3 + i$; (e) $z = 4 - i$; (f) $z = -2 + i$.

FAKT 1.32. (mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej)

Niech $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ będą liczbami zespolonymi w postaci trygonometrycznej oraz niech n będzie liczbą naturalną. Wtedy:

- (1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$;
 (2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$, o ile $z_2 \neq 0$;
 (3) $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ (wzór de Moivre'a)[‡].

Inaczej mówiąc, przy mnożeniu liczb zespolonych ich moduły mnożymy, a argumenty dodajemy. Podobnie, przy dzieleniu liczb zespolonych ich moduły dzielimy, a argumenty odejmujemy. Wzór de Moivre'a jest prawdziwy także, gdy n jest liczbą całkowitą.



Rys. 1.11. Ilustracja wzoru de Moivre'a

[‡]Abraham de Moivre (1667–1754), matematyk angielski pochodzenia francuskiego.

Dowód (3). Zastosujemy metodę indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ wzór jest prawdziwy. Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla liczby naturalnej n . Mamy zatem $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Pokażemy, że wzór ten jest prawdziwy dla liczby naturalnej $n+1$. Mamy

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z \stackrel{\substack{\text{zał.} \\ \text{ind.}}}{=} [r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)] [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)] \\ &= r^{n+1} [\cos n\varphi \cos \varphi - \sin n\varphi \sin \varphi + i (\sin n\varphi \cos \varphi + \cos n\varphi \sin \varphi)] \\ &= r^{n+1} [\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi]. \end{aligned}$$

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej n .

Ćwiczenie 1.33. Korzystając z postaci trygonometrycznej liczb zespolonych obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{(a)} & (1-i)(\sqrt{3}+i); & \text{(b)} & (4+4i)(-3+3i); & \text{(c)} & (10-10\sqrt{3}i)(2-2i); \\ \text{(d)} & \frac{2+2i}{1-i}; & \text{(e)} & \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i); & \text{(f)} & \frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}; & \text{(g)} & \frac{3i}{1+i}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1.34. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{(a)} & (1+i)^{10}; & \text{(b)} & (\sqrt{3}-i)^{60}; & \text{(c)} & (\sqrt{2}i-\sqrt{2})^{44}; \\ \text{(d)} & (\cos 11^\circ + i \sin 11^\circ)^9 (\cos 3^\circ + i \sin 3^\circ)^7; \\ \text{(e)} & \frac{(\cos 9^\circ + i \sin 9^\circ)^5}{(\sin 85^\circ + i \cos 85^\circ)^9} & \text{(f*)} & \left(\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}\right)^{18}. \end{aligned}$$

Wynik podać w postaci algebraicznej.

Ćwiczenie 1.35. Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić podane funkcje przez $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$:

$$\text{(a)} \cos 3\varphi; \quad \text{(b)} \sin 4\varphi; \quad \text{(c)} \cos 6\varphi.$$

Ćwiczenie 1.36. Niech $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r \geq 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Pokazać, że:

$$\begin{aligned} \text{(1)} & \bar{z} = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]; \\ \text{(2)} & \frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)], \text{ o ile } z \neq 0; \\ \text{(3)} & -z = r[\cos(\varphi + \pi) + i \sin(\varphi + \pi)]; \end{aligned}$$

Korzystając z powyższych wzorów i wzoru de Moivre'a znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

$$\begin{aligned} \text{(a)} & z^2 = (\bar{z})^2; & \text{(b)} & z^3 = -\bar{z}; & \text{(c)} & z^3 = -8i; \\ \text{(d)} & \bar{z} \cdot z^4 = \frac{1}{z}; & \text{(e)} & |z|^8 = z^4; & \text{(f)} & z^3 + (\bar{z})^3 = 0. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1.37. Naszkicować zbiory liczb zespolonych z spełniających nierówności:

$$(a) \operatorname{Re} [(i-1)z^3] \geq 0; \quad (b) \operatorname{Im} z^4 > \operatorname{Re} [(\bar{z})^4].$$

Ćwiczenie 1.38. Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że:

- (1) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ dla $k = 0$ lub $k = -1$;
- (2) $\arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$;
- (3) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$ dla $k = 0$ lub $k = 1$, o ile $z_2 \neq 0$.

Liczbę k dobieramy (w zależności od z, z_1, z_2 oraz n) w ten sposób, aby argument główny należał do przedziału $[0, 2\pi)$ lub $(-\pi, \pi]$.

Korzystając z powyższych wzorów znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

$$(a) \arg[(1+i)z] = \frac{3\pi}{2}; \quad (b) \frac{\pi}{4} \leq \arg \frac{i}{z} \leq \frac{\pi}{2}; \quad (c) \arg(z^4) = \pi; \quad (d) \arg(z^3) < \frac{\pi}{2}.$$

Ćwiczenie 1.39. Obliczyć argumenty główne liczb zespolonych:

$$(a) \frac{(1-i\sqrt{3})^5 (2+2i)^3}{(1-i)^7}; \quad (b) \frac{(\sqrt{3}+i)^4 (1+i)^9}{(1+i\sqrt{3})^{10}}.$$

Ćwiczenie 1.40. Napisać wzory opisujące przekształcenia płaszczyzny zespolonej:

- (a) symetria względem osi rzeczywistej;
- (b) symetria względem osi urojonej;
- (c) obrót o kąt α wokół początku układu współrzędnych;
- (d) symetria względem punktu z_0 ;
- (e) translacja o wektor z_0 ;
- (f) jednokładność w skali k względem początku układu współrzędnych;
- (g*) symetria względem prostej $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.

Ćwiczenie* 1.41. Obliczyć $(5-i)^4(1+i)$ i następnie uzasadnić równość

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239}.$$

Równość tę, zwaną wzorem Machina, dawniej stosowano do obliczeń przybliżonych liczby π . Korzystano przy tym z rozwinięcia funkcji $\arctg x$ w szereg potęgowy

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ćwiczenie* 1.42. Liczby zespolone stosuje się w elektrotechnice do opisu obwodów elektrycznych prądu zmiennego. Jednostkę urojoną oznacza się wtedy symbolem j w celu odróżnienia jej od natężenia prądu i płynącego w obwodzie. Niech ω będzie częstotliwością prądu, zaś t czasem. Zespolem odpowiednikiem prądu $i = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ ($a, b \in \mathbb{R}$) jest liczba zespolona $a + jb$. Znaleźć i nazwać zespolone odpowiedniki następujących wielkości:

- (a) amplituda $\sqrt{a^2 + b^2}$ prądu i ; (b) faza φ prądu $i = r \sin(\omega t + \varphi)$;
 (c) prędkość zmian prądu di/dt ; (d) suma $i_1 + i_2$ prądów tej samej częstotliwości ω .

1.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej

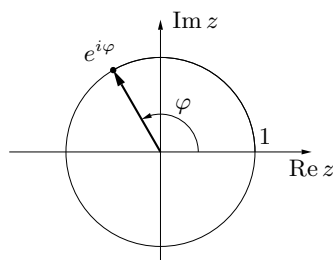
Definicja 1.43. (symbol $e^{i\varphi}$)

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ liczbę zespoloną $\cos \varphi + i \sin \varphi$ oznaczamy krótko przez $e^{i\varphi}$;

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Ćwiczenie 1.44. Obliczyć wartości podanych wyrażeń i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej:

- (a) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; (b) $e^{\pi i}$; (c) $e^{2\pi i}$;
 (d) $e^{-\frac{4}{3}\pi i}$; (e) e^i ; (f) e^{-2i} .



Rys. 1.12. Interpretacja geometryczna liczby $e^{i\varphi}$

Ćwiczenie 1.45. Niech $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech k będzie dowolną liczbą całkowitą. Uzasadnić, że:

- (1) $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$; (2) $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$; (3) $(e^{i\varphi})^k = e^{ik\varphi}$;
 (4) $e^{i(\varphi + 2k\pi)} = e^{i\varphi}$; (5) $e^{i\varphi} \neq 0$; (6) $|e^{i\varphi}| = 1$;
 (7) $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \varphi_1 = \varphi_2 + 2l\pi$ ($l \in \mathbb{Z}$);
 (8) $\arg(e^{i\varphi}) = \varphi + 2l\pi$ dla pewnego $l \in \mathbb{Z}$.

FAKT 1.46. (wzory Eulera[§])

Niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas zachodzą wzory:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

[§]Leonard Euler (1707–1783), matematyk, fizyk i astronom szwajcarski.

Ćwiczenie 1.47. Korzystając ze wzorów Eulera wyrazić podane funkcje w zależności od sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x :

- (a) $\sin^2 x$; (b) $\cos^3 x$; (c) $\sin^4 x$; (d) $\cos^5 x$; (e) $\sin^6 x$; (f) $\cos^7 x$.

Uwaga. Otrzymane zależności wykorzystuje się do obliczania całek postaci:

$$\int \sin^n x \, dx, \quad \int \cos^n x \, dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ćwiczenie 1.48. Korzystając ze wzorów Eulera przedstawić podane iloczyny w postaci sum sinusów i cosinusów:

- (a) $\sin \alpha \cos \beta$; (b) $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$; (c*) $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta$.

Ćwiczenie* 1.49. Obliczyć sumy:

- (a) $1 + \cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos 2nx$; (b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$.

FAKT 1.50. (postać wykładnicza liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci

$$z = r e^{i\varphi},$$

gdzie $r \geq 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Liczba r jest wówczas modulem liczby z , a φ jej argumentem. Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy *postacią wykładniczą*.

Uwaga. Analogicznie jak w postaci trygonometrycznej, liczby zespolone $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ w postaci wykładniczej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{albo} \quad r_1 = r_2 > 0 \quad \text{oraz} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ćwiczenie 1.51. Podane liczby zespolone zapisać w postaci wykładniczej:

- (a) $z = -1$; (b) $z = 1 + i$; (c) $z = -i$; (d) $z = 1 - \sqrt{3}i$; (e) $z = -2 + 7i$.

W ćwiczeniu (e) wykorzystać kalkulator.

FAKT 1.52. (działania na liczbach zespolonych w postaci wykładniczej)

Niech $z = r e^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Ponadto, niech k będzie liczbą całkowitą. Wtedy:

- (1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$; (2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, o ile $z_2 \neq 0$; (3) $z^k = r^k e^{ik\varphi}$;
 (4) $\bar{z} = r e^{-i\varphi}$; (5) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$, o ile $z \neq 0$; (6) $-z = r e^{i(\varphi + \pi)}$.

Ćwiczenie 1.53. Korzystając z postaci wykładniczej liczby zespolonej znaleźć i narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

- (a) $z^2 = \bar{z}$; (b) $|z^4| = z$; (c) $z^3 \cdot (\bar{z})^2 = -1$;
 (d) $z^3 = (\bar{z})^3$; (e) $z^3 = (2 + 2i)^6$; (f) $z^5 = -4\bar{z}$.

1.5. Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Definicja 1.54. (*pierwiastek z liczby zespolonej*)

Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną ω spełniającą równość $\omega^n = z$. Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Uwaga. Symbol $\sqrt[n]{}$ ma inne znaczenie w odniesieniu do liczb rzeczywistych, a inne do liczb zespolonych. Pierwiastek w dziedzinie rzeczywistej jest określony jednoznacznie i jest to funkcja $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla n nieparzystych oraz funkcja $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dla n parzystych. Pierwiastkowanie w dziedzinie zespolonej jest natomiast szukaniem rozwiązań równania $\omega^n = z$, zatem $\sqrt[n]{z}$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań tego równania. Symbolu pierwiastka w dziedzinie zespolonej **nie wolno używać** do obliczeń, gdyż jest on niejednoznaczny, a podstawowe wzory dla pierwiastków, prawdziwe w dziedzinie rzeczywistej, tutaj nie mają sensu. Poniższe zestawienie ilustruje omawiane różnice:

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{4} = \{-2, 2\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{1, i, -1, -i\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{i, -i\}$
$\sqrt{x^4} = x^2$	$\sqrt{z^4} = \{z^2, -z^2\}$
$\sqrt{x^2} = x $	$\sqrt{z^2} = \{z, -z\}$

Ćwiczenie 1.55. Wybierając dogodną postać liczb zespolonych obliczyć z definicji pierwiastki:

(a) $\sqrt{-7+24i}$; (b) $\sqrt[4]{-1}$; (c) $\sqrt[3]{-2-2i}$; (d) $\sqrt[3]{1+5i}$.

W ćwiczeniu (d) wykorzystać kalkulator.

FAKT 1.56. (*wzór na pierwiastki z liczby zespolonej*)

Każda liczba zespolona $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r > 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$, ma dokładnie n pierwiastków stopnia n :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dowód. Szukamy wszystkich rozwiązań równania $\omega^n = z$. Niech $\omega = \varrho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, gdzie $\varrho > 0$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, będzie rozwiązaniem tego równania. Wtedy, po zastosowaniu wzoru de Moivre'a, otrzymamy

$$\omega^n = \varrho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Stąd wynika, że $\varrho^n = r$ oraz $n\alpha = \varphi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Zatem $\varrho = \sqrt[n]{r}$ oraz $\alpha =$

$(\varphi + 2k\pi)/n$. Niech $\omega_k = \sqrt[n]{r} (\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i \sin((\varphi + 2k\pi)/n))$ będzie pierwiastkiem odpowiadającym wartości k . Z uwagi na okresowość funkcji trygonometrycznych pierwiastki ω_k oraz ω_{k+n} pokrywają się, więc istnieje tylko n parami różnych pierwiastków $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ liczby z .

Uwaga. Zbiór pierwiastków nie zależy od wyboru argumentu liczby zespolonej. Jeżeli φ jest jej argumentem głównym, to pierwiastek

$$\omega_0 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)$$

ma najmniejszy nieujemny argument. Ponadto, dla $k = 0, 1, \dots, n-2$ prawdziwa jest zależność:

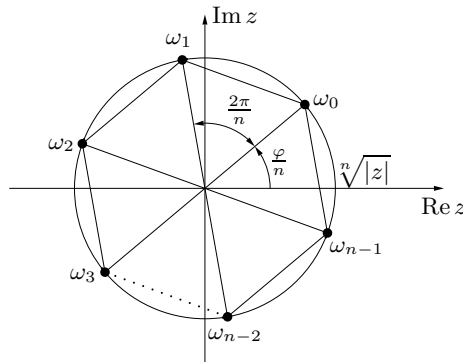
$$\omega_{k+1} = \omega_k \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = \omega_0 \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^{k+1}.$$

Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków

Zbiór pierwiastków stopnia $n \geq 3$ z liczby zespolonej

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r = |z|$ oraz $\varphi = \arg z$, pokrywa się ze zbiorem wierzchołków n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{r}$ i środku w początku układu współrzędnych.



Rys. 1.13. Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków z liczby zespolonej

Jeden z wierzchołków tego wielokąta jest w punkcie

$$\omega_0 = \sqrt[n]{r} (\cos(\varphi/n) + i \sin(\varphi/n)),$$

a kąty między promieniami wodzącymi sąsiednich wierzchołków są równe $2\pi/n$ (rys. 1.13).

Ćwiczenie 1.57. Obliczyć i narysować pierwiastki z liczb zespolonych:

- (a) $\sqrt[3]{8i}$; (b) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$; (c) $\sqrt[6]{-27}$; (d) $\sqrt[8]{1}$; (e) $\sqrt[5]{3+7i}$.

W ćwiczeniu (e) wykorzystać kalkulator.

Ćwiczenie 1.58. Rozwiązać równania kwadratowe lub wielokwadratowe:

- (a) $z^2 + 3z + 3 - i = 0$; (b) $z^2 + (2i - 1)z + 1 + 5i = 0$;
 (c) $z^4 - 4i\sqrt{3}z^2 - 16 = 0$; (d*) $z^6 + (2 - 6i)z^3 + 16 - 16i = 0$.

Ćwiczenie 1.59. Znaleźć wszystkie rozwiązania równań:

- (a) $z^6 = (1 + 2i)^{12}$; (b) $z^3 = (1 - i)^3$;
 (c) $(z - i)^4 = (iz + 3)^4$; (d*) $(z + 1)^6 + z^6 = 0$.

Ćwiczenie* 1.60. Znaleźć wszystkie liczby zespolone u i v , które spełniają równość:

- (a) $(u + v)^3 = u^3 + v^3$; (b) $(u + v)^4 = u^4 + v^4$; (c) $(u + v)^5 = u^5 + v^5$.