ALGEBRA
I
GEOMETRIA
ANALITYCZNA

Teresa Jurlewicz Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA I GEOMETRIA ANALITYCZNA

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie dwudzieste piąte uzupełnione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2024

Teresa Jurlewicz
Przedsiębiorstwo Informatyczne
YUMA
teresa.jurlewicz@yuma.com.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–67234–07–8

Wydanie XXV uzupełnione, Wrocław 2024
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. Kom.

Spis treści

Wstęp

Niniejsza książka* jest pierwszą częścią zestawu podręczników do przedmiotu Algebra z geometrią analityczną. Pozostałymi częściami zestawu są zbiór zadań pt. „*Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania*” oraz opracowanie pt. „*Algebra i geometria analityczna. Kolokwia i egzaminy*”. Książki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów oraz uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych oraz wojskowych.

Materiał zawarty w podręczniku obejmuje liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych, geometrię analityczną w przestrzeni oraz krzywe stożkowe. Wszystkie zagadnienia teoretyczne zakończone są ćwiczeniami, przy czym początkowe z nich są z reguły najprostsze. Do wybranych twierdzeń podane są dowody. Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza aktualnie obowiązujący program przedmiotu. W ten sam sposób oznaczono trudniejsze ćwiczenia. Dodatkowy materiał oraz trudniejsze ćwiczenia dołączono z myślą o studentach, którzy chcą rozszerzyć swoją wiedzę z algebry i geometrii analitycznej. Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań z tego przedmiotu zachęcamy do zapoznania się z książką „*Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami*”.

Równolegle do materiału teoretycznego omawianego na wykładach studenci powinni rozwiązywać samodzielnie zadania. Zbiór takich zadań wraz z metodami ich rozwiązywania można znaleźć w drugiej części zestawu pt. „*Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania*”. Ćwiczenia z tej książki oraz zadania z drugiej części podręcznika są podobnych typów i mają ten sam stopień trudności jak zadania, które zwykle pojawiają na kolokwiach i egzaminach. Zestawy zadań, które w poprzednich latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na sprawdzianach, umieszczone są w trzeciej części zestawu pt. „*Algebra i geometria analityczna. Kolokwia i egzaminy*”.

---

*Do 2005 r. książka miała tytuł „*Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*”.

Do obecnego wydania dodano kilka nowych ćwiczeń oraz rysunków. Ponadto, poprawiono zauważone błędy i usterki.

Serdecznie dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o poprzednich wydaniach podręcznika. Podziękowania składamy także dr. Jerzemu Cisło za wyjaśnienia spraw związanych z nawigacją w żeglarstwie.

Teresa Jurlewicz *Zbigniew Skoczylas*

1. Liczby zespolone

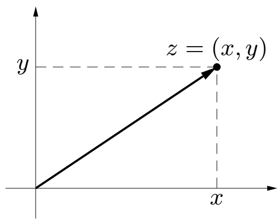
W pierwszym rozdziale wprowadzamy liczby zespolone oraz działania na nich. Następnie omawiamy postać algebraiczną, trygonometryczną i wykładniczą tych liczb. Rozdział kończymy pierwiastkowaniem liczb zespolonych.

1.1. Podstawowe definicje i własności

Definicja 1.1. *(liczba zespolona, działania w zbiorze liczb zespolonych)*
Liczbą zespoloną nazywamy parę uporządkowaną liczb rzeczywistych, np. (x, y), (u, v), (a, b). Liczby zespolone oznaczamy krótko przez z, w itp. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$. Mamy zatem

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Liczbę zespoloną $z = (x, y)$ przedstawiamy na płaszczyźnie w postaci punktu o współrzędnych (x, y) albo wektora o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu (x, y). W tej interpretacji zbiór wszystkich liczb zespolonych nazywamy *płaszczyzną zespoloną*.



Rys. 1.1. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

W zbiorze $\mathbb{C}$ wprowadzamy dwa działania – dodawanie i mnożenie. *Sumę* liczb zespolonych $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ określamy wzorem:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2),$$

a ich *iloczyn* wzorem:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1).$$

Uwaga. Z określenia pary uporządkowanej wynika, że liczby zespolone $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = y_2$. Iloczyn $z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$ złożony z n czynników zespolonych z oznaczamy przez z^n.

Notka historyczna. Liczby zespolone pojawiły się po raz pierwszy w XVI wieku. Wykorzystywano je (używając formalnie symbolu $\sqrt{-1}$) do obliczania pierwiastków rzeczywistych wielomianów stopnia trzeciego (wzory Cardana*). Pierwszą ścisłą teorię liczb zespolonych podał w XIX wieku Carl Gauss†. Jego interpretacja geometryczna liczb zespolonych oraz wprowadzona symbolika są stosowane współcześnie.

Ćwiczenie 1.2. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej liczby:

(a) $z_1 = (3, 2)$; (b) $z_2 = (-3, 1)$; (c) $z_3 = (10, 0)$; (d) $z_4 = (0, -4)$.

Ćwiczenie 1.3. Dla $z_1 = (0, 1)$, $z_2 = (3, -4)$ oraz $z_3 = \left(\sqrt{2}, -3\right)$ obliczyć:

(a) $z_1 + z_2,\ z_2 + z_3$; (b) $z_1 \cdot z_2,\ z_2 \cdot z_3$; (c) $(z_1)^2$.

Ćwiczenie 1.4. *(własności działań w zbiorze liczb zespolonych)*
Niech z_1, z_2, z_3 będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Pokazać, że:

(1) dodawanie liczb zespolonych jest:

- (a) przemienne, tzn. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
- (b) łączne, tzn. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

(2) dla każdej liczby zespolonej z liczba $\mathbf{0} = (0, 0)$ spełnia równość $z + \mathbf{0} = z$;

(3) dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y)$ liczba $-z = (-x, -y)$ spełnia równość $z + (-z) = \mathbf{0}$;

(4) mnożenie liczb zespolonych jest

- (a) przemienne, tzn. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
- (b) łączne, tzn. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;

(5) dla każdej liczby zespolonej z liczba $\mathbf{1} = (1, 0)$ spełnia równość $z \cdot \mathbf{1} = z$;

(6) dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y) \neq \mathbf{0}$ liczba

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

spełnia równość $z \cdot \dfrac{1}{z} = \mathbf{1}$;

(7) mnożenie liczb zespolonych jest rozdzielne względem dodawania, tzn.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Uwaga. Liczby zespolone $\mathbf{0}$, $-z$, $\mathbf{1}$ oraz $1/z$, wprowadzone odpowiednio w punktach (2), (3), (5) oraz (6), są jedynymi liczbami o żądanych własnościach. Liczby te nazywamy: $\mathbf{0}$ – elementem neutralnym dodawania, $-z$ – elementem przeciwnym do liczby z, $\mathbf{1}$ – elementem neutralnym mnożenia, $1/z$ – elementem odwrotnym do liczby z.

*Geronimo Cardano (1501-1576), matematyk, filozof i lekarz włoski.

†Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matematyk, astronom i fizyk niemiecki.

Ćwiczenie 1.5. Pokazać, że jeżeli liczby zespolone z_1, z_2 spełniają warunek $z_1 \cdot z_2 = \mathbf{0}$, to $z_1 = \mathbf{0}$ lub $z_2 = \mathbf{0}$.

Definicja 1.6. *(różnica i iloraz liczb zespolonych)*
Niech z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi.
Różnicę liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)\,.$$

Iloraz liczb zespolonych określamy wzorem:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}, \quad \text{o ile } \; z_2 \neq \mathbf{0}.$$

Uwaga. Wszystkie reguły podstawowych działań algebraicznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie), znane dla liczb rzeczywistych, obowiązują także w zbiorze liczb zespolonych. W szczególności prawdziwe są wzory skróconego mnożenia, wzór dwumianowy Newtona, wzory na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego itp.

Ćwiczenie 1.7. Obliczyć:

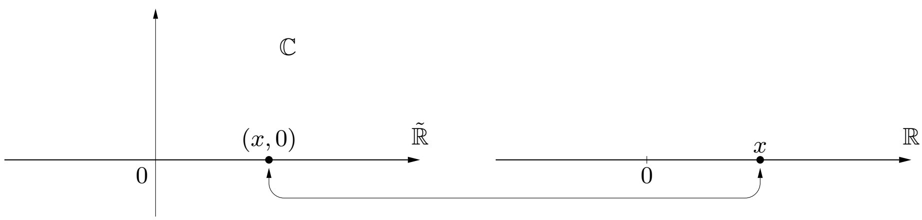
(a) $(4,-1)-(-3,5)$; (b) $\dfrac{(-1,-2)}{(3,4)}$; (c) $\dfrac{(0,-6)}{(0,2)}$.

Uwaga. Łatwo zauważyć, że liczby zespolone postaci $(x, 0)$ $(x \in \mathbb{R})$ mają następujące własności:

$$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)\,; \quad (x_1,0)-(x_2,0)=(x_1-x_2,0);$$

$$(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1\cdot x_2,0)\,; \quad \frac{(x_1,0)}{(x_2,0)}=\left(\frac{x_1}{x_2},0\right), \text{ o ile } x_2\neq 0.$$

Z własności tych wynika, że zbiór $\tilde{\mathbb{R}} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ można utożsamiać ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Będziemy pisali zatem x zamiast $(x,0)$.



Rys. 1.2. Zbiory $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$

1.2. Postać algebraiczna liczby zespolonej

Definicja 1.8. *(jednostka urojona)*
Liczbę zespoloną $(0,1)$ nazywamy *jednostką urojoną* i oznaczamy ją symbolem i: $i = (0,1)$.

Ćwiczenie 1.9. Pokazać, że liczba i jest rozwiązaniem równania $z^2 + 1 = 0$.

FAKT 1.10. *(postać algebraiczna liczby zespolonej)*
Każdą liczbę zespoloną z można jednoznacznie zapisać w postaci:

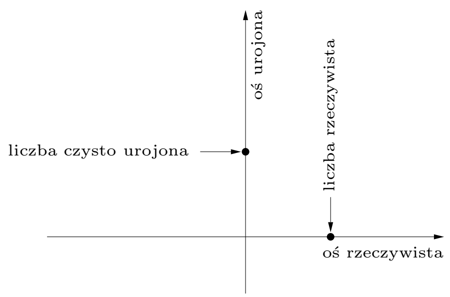
$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy *postacią algebraiczną.* Liczbę x nazywamy wówczas *częścią rzeczywistą* (z łac. *realis*) liczby zespolonej z, co zapisujemy $\operatorname{Re} z = x$, a liczbę y jej *częścią urojoną* (z łac. *imaginalis*), co zapisujemy $\operatorname{Im} z = y$. Ponadto, łatwo zauważyć, że liczby zespolone w postaci algebraicznej $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i odpowiednio urojone są równe, czyli, gdy

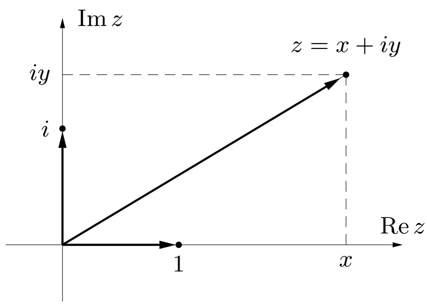
$$\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

Dowód. Zauważmy, że $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, co po utożsamieniu liczb postaci $(x, 0)$ z liczbami x oznacza, że $z = x + iy$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Jednoznaczność tego przedstawienia wynika z tego, że gdyby jednocześnie zachodził związek $z = x_1 + iy_1$ dla $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, to mielibyśmy $(x_1, 0) + (0, 1)(y_1, 0) = (x_1, y_1) = (x, y)$, a więc $x_1 = x$, $y_1 = y$.

Uwaga. Liczbę zespoloną postaci iy ($y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) nazywamy *czysto urojoną.* Nie każde przedstawienie liczby zespolonej w formie $x + iy$ jest jej postacią algebraiczną. Niezbędne jest dodanie warunku $x, y \in \mathbb{R}$. Np. przedstawienie $1 + i(-2i)$ nie jest postacią algebraiczną liczby 3.



Rys. 1.3. Osie rzeczywista i urojona na płaszczyźnie zespolonej



Rys. 1.4. Interpretacja geometryczna postaci algebraicznej liczby zespolonej

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb zespolonych w postaci algebraicznej wykonujemy tak jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów zmiennej i, przy warunku $i^2 = -1$. Przy dzieleniu przez liczbę zespoloną $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) należy dzielną i dzielnik pomnożyć przez $x - iy$, aby w mianowniku uzyskać liczbę rzeczywistą.

Ćwiczenie 1.11. Wykonać działania:

(a) $\left(1-\sqrt{3}i\right)+\left(1+\sqrt{2}i\right)$; (b) $(3i-2)-(1-2i)$;

(c) $(1+2i)(-3+4i)$; (d) $\dfrac{4+5i}{2-i}$.

Ćwiczenie 1.12. Niech $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. Uzasadnić równości:

(a) $\operatorname{Re}(z_1+z_2)=\operatorname{Re} z_1+\operatorname{Re} z_2$; (b) $\operatorname{Im}(z_1+z_2)=\operatorname{Im} z_1+\operatorname{Im} z_2$;

(c) $\operatorname{Re}(iz)=-\operatorname{Im} z$; (d) $\operatorname{Im}(iz)=\operatorname{Re} z$.

Ćwiczenie 1.13. Znaleźć liczby zespolone spełniające warunki:

(a) $z^2+4i=0$; (b) $\operatorname{Re} z-3\operatorname{Im} z=2$; (c) $\operatorname{Re}(iz)+1=0$;

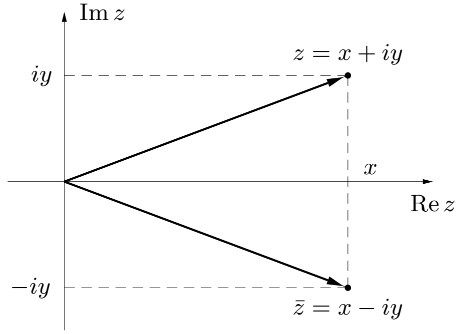
(d) $\dfrac{z+2}{i-1}=\dfrac{3z+i}{2+i}$; (e) $z^2-6z+10=0$; (f) $\operatorname{Im}\left(z^2\right)=(2-i)z$.

Wsk. Wykorzystać przedstawienie algebraiczne liczb zespolonych i warunek ich równości

Definicja 1.14. *(sprzężenie liczby zespolonej)*
Sprzężeniem liczby zespolonej $z=x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ nazywamy liczbę zespoloną $\overline{z}$ określoną wzorem:

$$\overline{z}=x-iy.$$

Liczba sprzężona do liczby zespolonej jest jej obrazem w symetrii względem osi $\operatorname{Re} z$ (rys. 1.5).



Rys. 1.5. Interpretacja geometryczna sprzężenia liczby zespolonej

FAKT 1.15. *(własności sprzężenia liczb zespolonych)*
Niech $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. Wtedy

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; **(2)** $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$;

(3) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$; **(4)** $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, o ile $z_2\neq 0$.

Uwaga. Równości w punktach (**1**) i (**3**) są prawdziwe dla dowolnej liczby odpowiednio składników i czynników.

Dowód. Udowodnimy własności (**1**), (**4**). Dowody pozostałych własności sprzężenia liczb zespolonych pozostawiamy Czytelnikowi. Niech $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ (x_1, y_1, x_2, $y_2 \in \mathbb{R}$). Wtedy mamy odpowiednio

$$(\mathbf{1}) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)}$$
$$= (x_1 + x_2) - i\,(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z}_1 + \overline{z}_2.$$

$$(\mathbf{4}) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right)} = \overline{\frac{(x_1 + iy_1)\,(x_2 - iy_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}} = \overline{\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i = \frac{(x_1 - iy_1)\,(x_2 + iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}.$$

Ćwiczenie 1.16. Sprawdzić, że

(a) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$; (b) $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$; (c) $\overline{(\overline{z})} = z$; (d) $\operatorname{Im}(\overline{z}) = -\operatorname{Im} z$.

Ćwiczenie 1.17. Rozwiązać równania:

(a) $2z + (3 - i)\overline{z} = 5 + 4i$; (b) $z + i = \overline{z + i}$;

(c) $z \cdot \overline{z} + (z - \overline{z}) = 3 + 2i$; (d) $z + \overline{z} + i\,(z - \overline{z}) = 5 + 3i$.

Wsk. Wykorzystać przedstawienie algebraiczne liczb zespolonych i warunek ich równości

Ćwiczenie 1.18. Uzasadnić równoważności:

(a) liczba zespolona z jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy $z = \overline{z}$;

(b) liczba zespolona $z \neq 0$ jest liczbą czysto urojoną wtedy i tylko wtedy, gdy $z = -\overline{z}$.

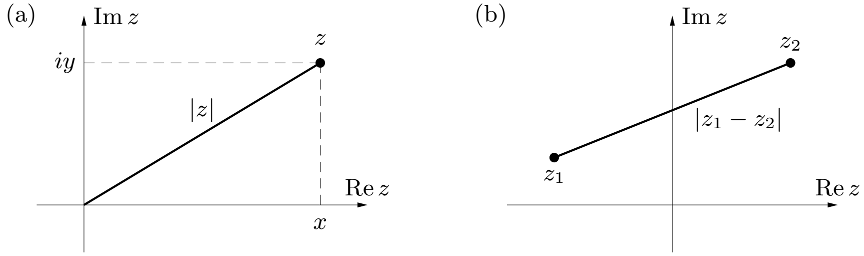
Ćwiczenie 1.19. Dlaczego w zbiorze liczb zespolonych nie można wprowadzić relacji nierówności ($\leqslant$) tak, aby zachowane były jej własności ze zbioru liczb rzeczywistych?

1.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Definicja 1.20. *(moduł liczby zespolonej)*

Modułem liczby zespolonej $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą $|z|$ określoną wzorem:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Rys. 1.6. Interpretacja geometryczna modułu:
(a) liczby zespolonej, (b) różnicy liczb zespolonych

Uwaga. Moduł liczby zespolonej jest uogólnieniem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Geometrycznie moduł liczby zespolonej z jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych (rys. 1.6 (a)). Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1, z_2 (rys. 1.6 (b)).

Ćwiczenie 1.21. Obliczyć moduły liczb zespolonych:

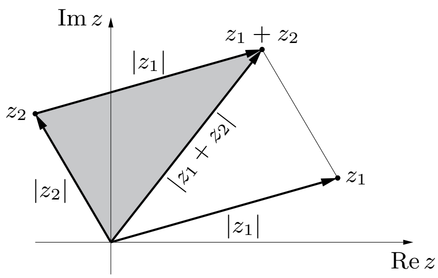
(a) $z = -i$; (b) $z = -1 + 3i$; (c) $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (d) $z = -5 - 12i$.

FAKT 1.22. *(własności modułu liczby zespolonej)*
Dla dowolnych liczb zespolonych z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzą relacje:

(**1**) $|\overline{z}| = |z| = |-z|$; (**2**) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$; (**3**) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(**4**) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, o ile $z_2 \neq 0$; (**5**) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$; (**6**) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Uwaga. Warunki w punktach (**3**) i (**5**) powyższego faktu prawdziwe są dla dowolnej liczby odpowiednio czynników i składników. W szczególności mamy $|z^n| = |z|^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Nierówność (**5**) jest nazywana *nierównością trójkąta* (rys. 1.7).



Rys. 1.7. Interpretacja geometryczna nierówności trójkąta

Dowód. Niech $z = x + iy$ (x, $y \in \mathbb{R}$). Wtedy mamy kolejno:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{1})\quad |\overline{z}| &= |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \\
|-z| &= |-x - iy| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.
\end{aligned}
$$

(**2**) $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2-(iy)^2 = x^2+y^2 = |z|^2$.

(**3**) Niech $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. Korzystając z własności (**2**) otrzymamy

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\,\overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = (z_1\overline{z}_1)\,(z_2\overline{z}_2) = |z_1|^2\,|z_2|^2 = (|z_1|\,|z_2|)^2\,.$$

Pierwiastkując obustronnie dostaniemy żądaną równość, korzystamy przy tym z tego, że $|z_1 \cdot z_2| \geqslant 0$ oraz $|z_1| \cdot |z_2| \geqslant 0$.

(**4**) Niech $z_2 \neq 0$. Wykorzystując poprzednie własności mamy

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}\right| = \frac{1}{|z_2|^2}\,|z_1\overline{z}_2| = \frac{1}{|z_2|^2}\,|z_1|\,|z_2| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

(**5**) Możliwe są dwa przypadki $z_1 + z_2 = 0$ lub $z_1 + z_2 \neq 0$. W pierwszym przypadku nierówność jest oczywista. Załóżmy więc, że $z_1 + z_2 \neq 0$. Wtedy, wobec wzoru $\operatorname{Re}(u+w) = \operatorname{Re} u + \operatorname{Re} w$, nierówności $\operatorname{Re} u \leqslant |u|$ i równości $|u/w| = |u|\,/\,|w|$, mamy kolejno

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2} + \frac{z_2}{z_1+z_2}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right)\\ &\leqslant \left|\frac{z_1}{z_1+z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1+z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_1+z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1+z_2|}.\end{aligned}$$

Stąd oraz z oczywistej równości $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_1+z_2} + \dfrac{z_2}{z_1+z_2}\right) = 1$, otrzymamy

$$\frac{|z_1|}{|z_1+z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1+z_2|} \geqslant 1,$$

co po pomnożeniu stron przez $|z_1 + z_2|$ daje żądaną nierówność.

(**6**) Z poprzedniej nierówności wynika, że

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2| \quad \text{oraz} \quad |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leqslant |z_2 - z_1| + |z_1|\,.$$

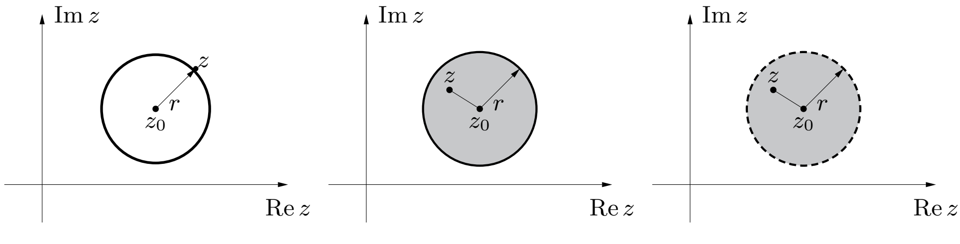
Zatem

$$-\,|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|\,, \ \ \text{więc} \ \ \Big|\,|z_1| - |z_2|\,\Big| \leqslant |z_1 - z_2|\,.$$

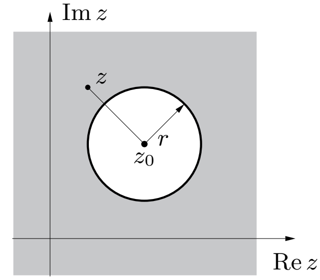
Ćwiczenie 1.23. Obliczyć moduły liczb zespolonych:

(a) $(1+2i)(3-4i)$; (b) $\dfrac{4+i}{3+2i}$; (c) $\left(1+\sqrt{2}i\right)^4$; (d) $\dfrac{\left(3-\sqrt{3}i\right)^2}{\left(\sqrt{2}+2i\right)^3}$.

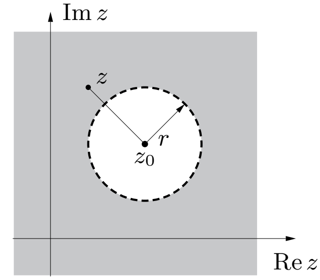
Interpretacje geometryczne równań i nierówności z modułem



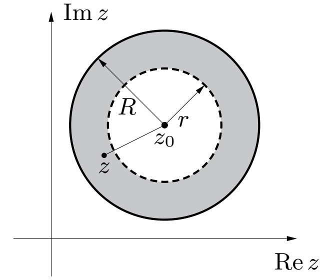
$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$ $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$



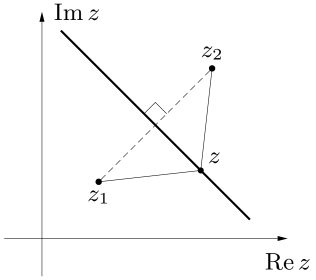
$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \geqslant r\}$



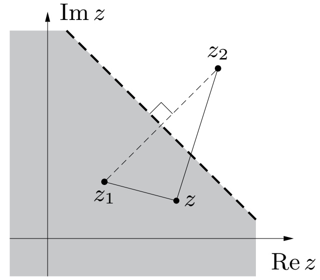
$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$



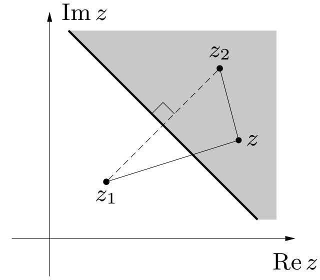
$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| \leqslant R\}$



$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = |z - z_2|\}$



$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| < |z - z_2|\}$



$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \geqslant |z - z_2|\}$

Ćwiczenie 1.24. Narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

(a) $|z + i| = 3$; (b) $|2iz + 6| \leqslant 4$; (c) $2 < |z + 2 - i| \leqslant 3$;

(d) $|z + 5| = |3i - z|$; (e) $\left|\dfrac{z-3}{z-3i}\right| > 1$; (f) $|\overline{z} + 2 - i| \leqslant |z|$;

(g*) $|z+i|+|z-i| = 2$; (h) $\left|\dfrac{z+i}{z^2+1}\right| \leqslant 1$; (i) $3|z-1| \leqslant \left|z^2 - 1\right| < 6|z+1|$.

Ćwiczenie 1.25. Uzasadnić, że równość

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

jest prawdziwa dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2. Podać interpretację geometryczną tej tożsamości.

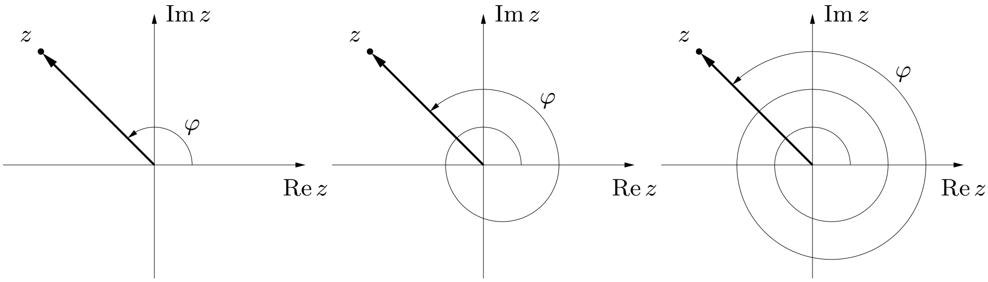
Definicja 1.26. *(argument i argument główny liczby zespolonej)*
Argumentem liczby zespolonej $z = x + iy \neq 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$ nazywamy każdą liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą układ równań:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Przyjmujemy, że argumentem liczby zespolonej $z = 0$ jest dowolna liczba $\varphi \in \mathbb{R}$. *Argumentem głównym* liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument φ tej liczby spełniający nierówności $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Przyjmujemy, że argumentem głównym liczby $z = 0$ jest 0. Argument główny liczby zespolonej z oznaczamy przez $\arg z$. Każdy argument φ liczby zespolonej $z \neq 0$ ma postać

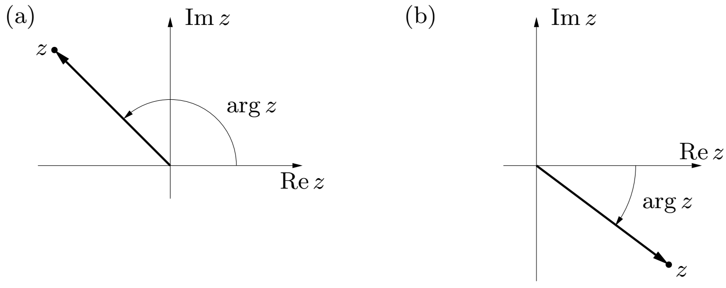
$$\varphi = \arg z + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Uwaga. Argumenty liczby zespolonej są miarami kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej i wektor wodzący tej liczby (rys. 1.8). Argument główny liczby zespolonej jest najmniejszą nieujemną miarą kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej i wektor wodzący tej liczby (rys. 1.9 (a)).



Rys. 1.8. Argumenty liczby zespolonej

Czasem wygodnie jest przyjąć, że argument główny liczby zespolonej jest liczbą z przedziału $(-\pi, \pi]$ (rys. 1.9 (b)).



Rys. 1.9. Argument główny liczby zespolonej

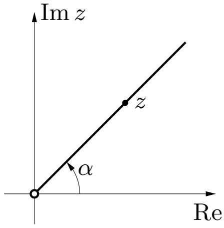
Ćwiczenie 1.27. Znaleźć argumenty główne liczb zespolonych:

(a) $z = 2$; (b) $z = i$; (c) $z = -\pi$;

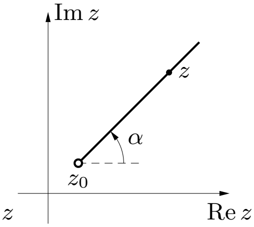
(d) $z = 3 - 3i$; (e) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; (f) $z = -3 + 4i$.

W ćwiczeniu (f) wykorzystać kalkulator lub komputer.

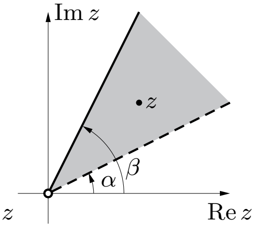
Interpretacje geometryczne równań i nierówności z argumentem



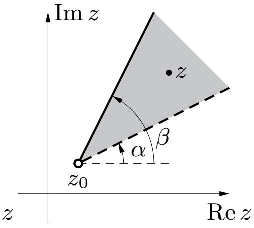
$\{z\in\mathbb{C}\colon \arg z=\alpha\}$



$\{z\in\mathbb{C}\colon \arg(z-z_0)=\alpha\}$



$\{z\in\mathbb{C}\colon \alpha<\arg z\leqslant\beta\}$



$\{z\in\mathbb{C}\colon \alpha<\arg(z-z_0)\leqslant\beta\}$

Ćwiczenie 1.28. Narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki: (a) $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$; (b) $\arg(z+i)=\pi$; (c) $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arg z<\dfrac{3\pi}{2}$; (d) $|\pi-\arg(z+1)|\geqslant\dfrac{3\pi}{4}$.

Ćwiczenie* 1.29. Niech $z\neq 0$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Pokazać, że
(1) $\arg(\overline{z})=2\pi-\arg z$, gdy $\arg z\neq 0$;

(2) $\arg(-z)=\begin{cases}\arg z+\pi, & \text{gdy}\quad 0\leqslant\arg z<\pi,\\ \arg z-\pi, & \text{gdy}\quad \pi\leqslant\arg z<2\pi;\end{cases}$

(3) $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=2\pi-\arg z$, gdy $\arg z\neq 0$.

Korzystając z powyższych wzorów narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

(a) $\arg(-z)=\dfrac{2\pi}{3}$; (b) $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$; (c) $\arg(\overline{z})=\dfrac{3\pi}{4}$;

(d) $\dfrac{\pi}{6}\leqslant\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)<\dfrac{\pi}{2}$; (e) $\dfrac{\pi}{4}<\arg(\overline{z})\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$; (f) $\dfrac{\pi}{6}\leqslant\arg(2+i-z)\leqslant\pi$;

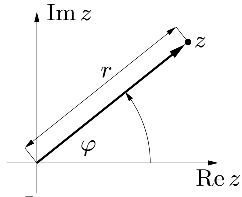
(g) $\arg(-\overline{z})\geqslant\dfrac{\pi}{2}$; (h) $\arg\left(\dfrac{1}{z+i}\right)<\pi$; (i) $\pi<\arg[(1+i)z]<\dfrac{3\pi}{2}$.

FAKT 1.30. *(postać trygonometryczna liczby zespolonej)*

Każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

gdzie $r\geqslant 0$ oraz $\varphi\in\mathbb{R}$. Liczba r jest wówczas modułem liczby z, a φ jednym z jej argumentów (rys. 1.10). Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy *postacią trygonometryczną*.



Rys. 1.10. Interpretacja geometryczna postaci trygonometrycznej liczby zespolonej

Uwaga. Łatwo pokazać, że liczby zespolone w postaci trygonometrycznej

$$z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

są równe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$r_1 = r_2 = 0 \text{ albo } r_1 = r_2 > 0 \text{ oraz } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}.$$

Dowód. Dla liczby $z = 0$ mamy $r = |z| = 0$ i równość zachodzi dla dowolnej wartości $\varphi \in \mathbb{R}$. Dla $z \neq 0$ mamy

$$z = x + iy = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|} \right) = r (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie r jest modułem, a φ argumentem liczby z. Gdyby równość $z = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ zachodziła dla innych liczb $r_1 \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, to mielibyśmy

$$|z| = \sqrt{(r_1\cos\varphi_1)^2 + (r_1\sin\varphi_1)^2} = r_1 = r.$$

Z układu równań $\cos\varphi_1 = \cos\varphi$, $\sin\varphi_1 = \sin\varphi$ wynika związek $\varphi_1 = \varphi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Zatem liczba φ_1 też jest argumentem liczby z.

Ćwiczenie 1.31. Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej (w razie potrzeby wykorzystać kalkulator lub komputer):

(a) $z = -1$; (b) $z = 1 + i$; (c) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

(d) $z = 3 + i$; (e) $z = 4 - i$; (f) $z = -2 + i$.

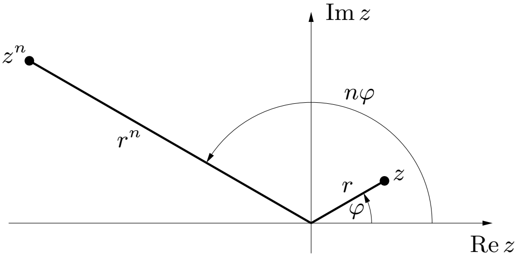
FAKT 1.32. *(mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej)* Niech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ będą liczbami zespolonymi w postaci trygonometrycznej oraz niech n będzie liczbą naturalną. Wtedy:

(1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$;

(2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, o ile $z_2 \neq 0$;

(3) $z^n = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (wzór de Moivre'a[‡]).

Inaczej mówiąc, przy mnożeniu liczb zespolonych ich moduły mnożymy, a argumenty dodajemy. Podobnie, przy dzieleniu liczb zespolonych ich moduły dzielimy, a argumenty odejmujemy. Wzór de Moivre'a jest prawdziwy także, gdy n jest liczbą całkowitą.



Rys. 1.11. Ilustracja wzoru de Moivre'a

Dowód (3). Zastosujemy metodę indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ wzór jest prawdziwy. Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla liczby naturalnej n. Mamy zatem $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Pokażemy, że wzór ten jest prawdziwy dla liczby naturalnej $n+1$. Mamy

$$\begin{aligned} z^{n+1} = z^n \cdot z \left[\begin{smallmatrix}\text{zał.}\\ \text{ind.}\end{smallmatrix}\right] &= [r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)] [r (\cos\varphi + i \sin\varphi)] \\ &= r^{n+1} [\cos n\varphi \cos\varphi - \sin n\varphi \sin\varphi + i (\sin n\varphi \cos\varphi + \cos n\varphi \sin\varphi)] \\ &= r^{n+1} [\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi] . \end{aligned}$$

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej n.

Ćwiczenie 1.33. Korzystając z postaci trygonometrycznej liczb zespolonych obliczyć:

(a) $(1-i)\left(\sqrt{3}+i\right)$; (b) $(4+4i)(-3+3i)$; (c) $\left(10-10\sqrt{3}i\right)(2-2i)$;

(d) $\dfrac{2+2i}{1-i}$; (e) $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$; (f) $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$; (g) $\dfrac{3i}{1+i}$.

Ćwiczenie 1.34. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć:

(a) $(1+i)^{10}$; (b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{60}$; (c) $\left(\sqrt{2}i-\sqrt{2}\right)^{44}$;

(d) $(\cos 11^\circ + i \sin 11^\circ)^9 (\cos 3^\circ + i \sin 3^\circ)^7$;

(e) $\dfrac{(\cos 9^\circ + i \cos 9^\circ)^5}{(\sin 85^\circ + i \cos 85^\circ)^9}$ (f*) $\left(\sin\dfrac{\pi}{12} - i \cos\dfrac{\pi}{12}\right)^{18}$.

Wynik podać w postaci algebraicznej.

Ćwiczenie 1.35. Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić podane funkcje przez $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$:

(a) $\cos 3\varphi$; (b) $\sin 4\varphi$; (c) $\cos 6\varphi$.

Ćwiczenie 1.36. Niech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r \geqslant 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Pokazać, że:

(1) $\overline{z} = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$;

(2) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$, o ile $z \neq 0$;

(3) $-z = r[\cos(\varphi+\pi) + i \sin(\varphi+\pi)]$;

Korzystając z powyższych wzorów i wzoru de Moivre'a znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

(a) $z^2 = (\overline{z})^2$; (b) $z^3 = -\overline{z}$; (c) $z^3 = -8i$;

(d) $\overline{z} \cdot z^4 = \dfrac{1}{z}$; (e) $|z|^8 = z^4$; (f) $z^3 + (\overline{z})^3 = 0$.

Ćwiczenie 1.37. Naszkicować zbiory liczb zespolonych z spełniających nierówności:
(a) $\operatorname{Re}\left[(i-1)z^3\right] \geqslant 0$; (b) $\operatorname{Im} z^4 > \operatorname{Re}\left[(\overline{z})^4\right]$.

Ćwiczenie 1.38. Niech z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że:
(1) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ dla $k = 0$ lub $k = -1$;
(2) $\arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$;
(3) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$ dla $k = 0$ lub $k = 1$, o ile $z_2 \neq 0$.
Liczbę k dobieramy (w zależności od z, z_1, z_2 oraz n) w ten sposób, aby argument główny należał do przedziału $[0, 2\pi)$ lub $(-\pi, \pi]$.
Korzystając z powyższych wzorów znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:
(a) $\arg[(1+i)z] = \dfrac{3\pi}{2}$; (b) $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg\dfrac{i}{z} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; (c) $\arg\left(z^4\right) = \pi$; (d) $\arg\left(z^3\right) < \dfrac{\pi}{2}$.

Ćwiczenie 1.39. Obliczyć argumenty główne liczb zespolonych:
(a) $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5 (2+2i)^3}{(1-i)^7}$; (b) $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^4 (1+i)^9}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}}$.

Ćwiczenie 1.40. Napisać wzory opisujące przekształcenia płaszczyzny zespolonej:
(a) symetria względem osi rzeczywistej;
(b) symetria względem osi urojonej;
(c) obrót o kąt α wokół początku układu współrzędnych;
(d) symetria względem punktu z_0;
(e) translacja o wektor z_0;
(f) jednokładność w skali k względem początku układu współrzędnych;
(g*) symetria względem prostej $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.

Ćwiczenie* 1.41. Obliczyć $(5-i)^4(1+i)$ i następnie uzasadnić równość
$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}.$$
Równość tę, zwaną wzorem Machina, dawniej stosowano do obliczeń przybliżonych liczby π. Korzystano przy tym z rozwinięcia funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$ w szereg potęgowy
$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ćwiczenie* 1.42. Liczby zespolone stosuje się w elektrotechnice do opisu obwodów elektrycznych prądu zmiennego. Jednostkę urojoną oznacza się wtedy symbolem j w celu odróżnienia jej od natężenia prądu i płynącego w obwodzie. Niech ω będzie częstotliwością prądu, zaś t czasem. Zespolonym odpowiednikiem prądu $i = a\sin\omega t + b\cos\omega t$ $(a, b \in \mathbb{R})$ jest liczba zespolona $a+jb$. Znaleźć i nazwać zespolone odpowiedniki następujących wielkości:

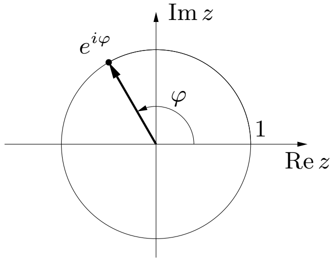
(a) amplituda $\sqrt{a^2+b^2}$ prądu i; (b) faza φ prądu $i = r\sin(\omega t + \varphi)$;

(c) prędkość zmian prądu di/dt; (d) suma i_1+i_2 prądów tej samej częstotliwości ω.

1.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej

Definicja 1.43. *(symbol $e^{i\varphi}$)*
Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ liczbę zespoloną $\cos\varphi + i\sin\varphi$ oznaczamy krótko przez $e^{i\varphi}$;

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$



Rys. 1.12. Interpretacja geometryczna liczby $e^{i\varphi}$

Ćwiczenie 1.44. Obliczyć wartości podanych wyrażeń i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej:

(a) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; (b) $e^{\pi i}$; (c) $e^{2\pi i}$;

(d) $e^{-\frac{4}{3}\pi i}$; (e) e^{i}; (f) e^{-2i}.

Ćwiczenie 1.45. Niech φ, φ_1, φ_2 będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech k będzie dowolną liczbą całkowitą. Uzasadnić, że:

(1) $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$; (2) $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$; (3) $\left(e^{i\varphi}\right)^k = e^{ik\varphi}$;

(4) $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}$; (5) $e^{i\varphi} \neq 0$; (6) $\left|e^{i\varphi}\right| = 1$;

(7) $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \Longleftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$;

(8) $\arg\left(e^{i\varphi}\right) = \varphi + 2l\pi$ dla pewnego $l \in \mathbb{Z}$.

FAKT 1.46. *(wzory Eulera[§])*
Niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas zachodzą wzory:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

[§]Leonard Euler (1707–1783), matematyk, fizyk i astronom szwajcarski.

Ćwiczenie 1.47. Korzystając ze wzorów Eulera wyrazić podane funkcje w zależności od sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x:
(a) $\sin^2 x$; (b) $\cos^3 x$; (c) $\sin^4 x$; (d) $\cos^5 x$; (e) $\sin^6 x$; (f) $\cos^7 x$.

Uwaga. Otrzymane zależności wykorzystuje się do obliczania całek postaci:
$$\int \sin^n x\, dx, \quad \int \cos^n x\, dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ćwiczenie 1.48. Korzystając ze wzorów Eulera przedstawić podane iloczyny w postaci sum sinusów i cosinusów:
(a) $\sin\alpha\cos\beta$; (b) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; (c*) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta$.

Ćwiczenie* 1.49. Obliczyć sumy:
(a) $1+\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2nx$; (b) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$.

FAKT 1.50. *(postać wykładnicza liczby zespolonej)*
Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci
$$z = re^{i\varphi},$$
gdzie $r \geqslant 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Liczba r jest wówczas modułem liczby z, a φ jej argumentem. Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy *postacią wykładniczą*.

Uwaga. Analogicznie jak w postaci trygonometrycznej, liczby zespolone $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ w postaci wykładniczej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy
$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{albo} \quad r_1 = r_2 > 0 \ \text{ oraz } \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ćwiczenie 1.51. Podane liczby zespolone zapisać w postaci wykładniczej:
(a) $z = -1$; (b) $z = 1+i$; (c) $z = -i$; (d) $z = 1-\sqrt{3}i$; (e) $z = -2+7i$.
W ćwiczeniu (e) wykorzystać kalkulator.

FAKT 1.52. *(działania na liczbach zespolonych w postaci wykładniczej)*
Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Ponadto, niech k będzie liczbą całkowitą. Wtedy:

(**1**) $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$; (**2**) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$, o ile $z_2 \neq 0$; (**3**) $z^k = r^ke^{ik\varphi}$;

(**4**) $\overline{z} = re^{-i\varphi}$; (**5**) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\varphi}$, o ile $z \neq 0$; (**6**) $-z = re^{i(\varphi+\pi)}$.

Ćwiczenie 1.53. Korzystając z postaci wykładniczej liczby zespolonej znaleźć i narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:
(a) $z^2 = \overline{z}$; (b) $|z^4| = z$; (c) $z^3 \cdot (\overline{z})^2 = -1$;
(d) $z^3 = (\overline{z})^3$; (e) $z^3 = (2+2i)^6$; (f) $z^5 = -4\overline{z}$.

1.5. Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Definicja 1.54. *(pierwiastek z liczby zespolonej)*
Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną ω spełniającą równość $\omega^n = z$. Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Uwaga. Symbol $\sqrt[n]{}$ ma inne znaczenie w odniesieniu do liczb rzeczywistych, a inne do liczb zespolonych. Pierwiastek w dziedzinie rzeczywistej jest określony jednoznacznie i jest to funkcja $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dla n nieparzystych oraz funkcja $[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ dla n parzystych. Pierwiastkowanie w dziedzinie zespolonej jest natomiast szukaniem rozwiązań równania $\omega^n = z$, zatem $\sqrt[n]{z}$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań tego równania. Symbolu pierwiastka w dziedzinie zespolonej **nie wolno używać** do obliczeń, gdyż jest on niejednoznaczny, a podstawowe wzory dla pierwiastków, prawdziwe w dziedzinie rzeczywistej, tutaj nie mają sensu. Poniższe zestawienie ilustruje omawiane różnice:

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{4} = \{-2, 2\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{1, i, -1, -i\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{i, -i\}$
$\sqrt{x^4} = x^2$	$\sqrt{z^4} = \left\{z^2, -z^2\right\}$
$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$\sqrt{z^2} = \{z, -z\}$

Ćwiczenie 1.55. Wybierając dogodną postać liczb zespolonych obliczyć z definicji pierwiastki:

(a) $\sqrt{-7+24i}$; (b) $\sqrt[4]{-1}$; (c) $\sqrt[3]{-2-2i}$; (d) $\sqrt[3]{1+5i}$.
W ćwiczeniu (d) wykorzystać kalkulator.

FAKT 1.56. *(wzór na pierwiastki z liczby zespolonej)*
Każda liczba zespolona $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r > 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$, ma dokładnie n pierwiastków stopnia n :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dowód. Szukamy wszystkich rozwiązań równania $\omega^n = z$. Niech $\omega = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, gdzie $\varrho > 0$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, będzie rozwiązaniem tego równania. Wtedy, po zastosowaniu wzoru de Moivre'a, otrzymamy

$$\omega^n = \varrho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Stąd wynika, że $\varrho^n = r$ oraz $n\alpha = \varphi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Zatem $\varrho = \sqrt[n]{r}$ oraz $\alpha =$

$(\varphi + 2k\pi)/n$. Niech $\omega_k = \sqrt[n]{r}\,(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\sin((\varphi + 2k\pi)/n))$ będzie pierwiastkiem odpowiadającym wartości k. Z uwagi na okresowość funkcji trygonometrycznych pierwiastki ω_k oraz ω_{k+n} pokrywają się, więc istnieje tylko n parami różnych pierwiastków $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ liczby z.

Uwaga. Zbiór pierwiastków nie zależy od wyboru argumentu liczby zespolonej. Jeżeli φ jest jej argumentem głównym, to pierwiastek

$$\omega_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

ma najmniejszy nieujemny argument. Ponadto, dla $k = 0, 1, \ldots, n-2$ prawdziwa jest zależność:

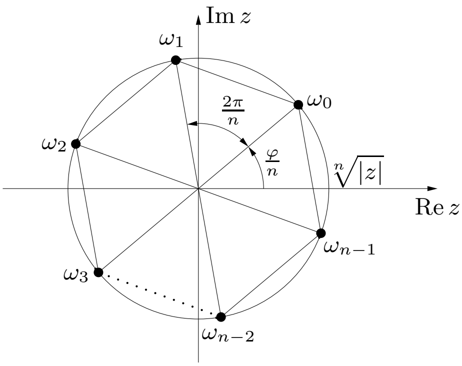
$$\omega_{k+1} = \omega_k\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right) = \omega_0\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{k+1}.$$

Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków

Zbiór pierwiastków stopnia $n \geqslant 3$ z liczby zespolonej

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie $r = |z|$ oraz $\varphi = \arg z$, pokrywa się ze zbiorem wierzchołków n–kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{r}$ i środku w początku układu współrzędnych.



Rys. 1.13. Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków z liczby zespolonej

Jeden z wierzchołków tego wielokąta jest w punkcie

$$\omega_0 = \sqrt[n]{r}\,(\cos(\varphi/n) + i\sin(\varphi/n)),$$

a kąty między promieniami wodzącymi sąsiednich wierzchołków są równe $2\pi/n$ (rys. 1.13).

Ćwiczenie 1.57. Obliczyć i narysować pierwiastki z liczb zespolonych:

(a) $\sqrt[3]{8i}$; (b) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$; (c) $\sqrt[6]{-27}$; (d) $\sqrt[8]{1}$; (e) $\sqrt[5]{3+7i}$.

W ćwiczeniu (e) wykorzystać kalkulator.

Ćwiczenie 1.58. Rozwiązać równania kwadratowe lub wielokwadratowe:
(a) $z^2 + 3z + 3 - i = 0$; (b) $z^2 + (2i - 1)z + 1 + 5i = 0$;
(c) $z^4 - 4i\sqrt{3}z^2 - 16 = 0$; (d*) $z^6 + (2 - 6i)z^3 + 16 - 16i = 0$.

Ćwiczenie 1.59. Znaleźć wszystkie rozwiązania równań:
(a) $z^6 = (1 + 2i)^{12}$; (b) $z^3 = (1 - i)^3$;
(c) $(z - i)^4 = (iz + 3)^4$; (d*) $(z + 1)^6 + z^6 = 0$.

Ćwiczenie* 1.60. Znaleźć wszystkie liczby zespolone u i v, które spełniają równość:
(a) $(u + v)^3 = u^3 + v^3$; (b) $(u + v)^4 = u^4 + v^4$; (c) $(u + v)^5 = u^5 + v^5$.